

KONINKLIJKE NEDERLANDSCHE AKADEMIE VAN  
WETENSCHAPPEN

---

PROCEEDINGS

VOLUME XLIII

No. 2

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: M. W. WOERDEMAN

---

CONTENTS

- BROUWER, H. A.: "Metamorphic Differentiation in hartschiefer of Northern Sweden", p. 142.
- ITERSON, F. K. TH. VAN: "La pression du toit sur le charbon près du front dans les exploitations par tailles chassantes". I, p. 149.
- WEITZENBÖCK, R.: "Ueber affine Invarianten bei Kegelschnitten", p. 159.
- WEITZENBÖCK, R.: "Zur Affineometrie der  $F_2$  im  $R_3$ ", p. 168.
- SCHOUTEN, J. A., und W. VAN DER KULK: "Beiträge zur Theorie der Systeme PFAFFscher Gleichungen". II. Beweis des Haupttheorems für  $q = n - 5$ , p. 179.
- COHEN ERNST, und J. J. A. BLEKKINGH Jr.: "Der Einfluss des Dispersitätsgrades auf physikalisch-chemische Konstanten". (Achte Mitteilung), p. 189.
- MEIJER, C. S.: "Ueber BESSELSche, STRUVESche und LOMMELSche Funktionen". (Erste Mitteilung). (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 198.
- KOKSMA, J. F.: "Ueber die asymptotische Verteilung eines beliebigen Systems ( $f_v$ ) von  $n$  reellen Funktionen  $f_v$  der  $m$  ganzzahligen Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_m$  modulo Eins". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 211.
- KLOOSTERMAN, H. D.: "Tauberian theorems for Cesaro-summability of double series". (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 215.
- FELDHEIM, ERVIN: "Développements en série de polynomes d'HERMITE et de LAGUERRE à l'aide des transformations de GAUSS et de HANKEL". I. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 224.
- FELDHEIM, ERVIN: "Développements en série de polynomes d'HERMITE et de LAGUERRE à l'aide des transformations de GAUSS et de HANKEL", II. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 240.
- HELLINGA, J. J. A.: "On the Effect of Substances, produced by Fungi, on the Respiration of the Tissue of Potato Tubers". I. (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE), p. 249.
- HELLINGA, J. J. A.: "On the Effect of Substances, produced by Fungi, on the Respiration of the Tissue of Potato Tubers", II. (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE), p. 267.
-

**Petrology.** — *Metamorphic differentiation in hartschiefer of Northern Sweden.* By Prof. H. A. BROUWER.

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

In crushed granites or felspathic sandstones sericitic zones, along which slipping took place, are found between the broken minerals and the more freely soluble quartz may be entirely recrystallized while the felspar crystals have partly resisted recrystallization. The unequal distribution of stress has a selective effect and different minerals are found in contiguous lenticles or bands. Elevation of temperature relaxes rigidity, but at those temperatures where biotite is formed the effects of fracture may still be clearly shown.

A more or less pronounced alternation of bands and lenticles which differ in the relative proportion of muscovite and biotite in their mineral associations is well developed in some of the so-called hartschiefer near Abisko in northern Sweden. These metamorphosed rocks show a large amount of recrystallization and also the mechanical effects of dynamic metamorphism<sup>1, 2</sup>). The pressure and temperature necessary for the intense mylonitization and for the generation of new minerals prove a considerable depth of cover. They alternate with dolomites and the varying mineralogical composition also points to an original stratification but the original differences between the alternating layers have often been greatly obscured and many of the rocks now show banding and not stratification as their most striking feature.

Along the banks of the Abiskojokk and along the lower slopes of Mt Nuolja the metamorphosed rocks mostly were felspathic sandstones with a varying felspar content. In some rocks on the lower slope of Mt Nuolja garnet, titanite, epidote, apatite and other minerals are found, which prove that the detritus was derived from various kinds of crystalline rocks. Felspar eyes (potash felspar and acid plagioclase, mostly albite) are common in these rocks. Along the banks of the Abiskojokk intercalations, which are rich in large crystals of broken potash felspar, are locally found in rocks of a somewhat different type in which tourmaline is a common constituent.

---

<sup>1</sup>) P. J. HOLMQUIST, Die Hochgebirgsbildungen am Torne Träsk in Lappland. Exkursionsführer no. 6. Congrès Géol. Intern. Stockholm 1910.

<sup>2</sup>) H. A. BROUWER, Ueber metamorphe Gesteine am Torne Träsk (Lappland). Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **40**, 414—421 (1937).

*Cataclastic displacements in the felspathic intercalations.*

The felspathic intercalations in the Abiskojoekk consist of broken felspars and blastic quartz with biotite, carbonate and iron ore.

The felspar fragments are sometimes strongly torn apart, the other minerals have crystallized in the spaces between them. More or less continuous surfaces of discontinuity along which slipping took place mainly

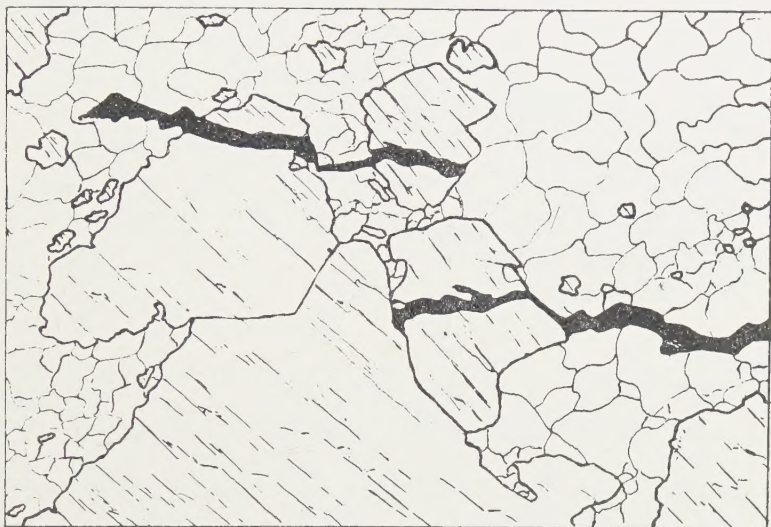


Fig. 1. Felspathic intercalation in the hartschiefer of Abiskojoekk (Swedish Lappland). Successive stages in the cataclastic process: fragmentation of the felspars, crystallization of blastic quartz, formation of cracks (in the figure with iron ore) and finally faulting movements. Enlargement  $\times 174^1$ .

consist of muscovite<sup>2</sup>). Different stages of breaking-down and recrystallization are shown in fig. 1. During and after the fragmentation of the felspars, the soluble quartz is redeposited between the felspar fragments. A crack with iron ore is of younger formation and was faulted in a later stage. The faulting movements are oblique to the plane of the figure.

*Biotite in places of relative relief from stress.*

In strongly folded micaschists, which are found below an intercalation of dolomite in the hartschiefer on the lower eastern slope of Mt Nuolja, biotite is found near the bends of the folds, whilst the limbs consist of muscovite (fig. 2).

Some biotite is also found in the limbs with blastic quartz at places of local relief of pressure. The folding is clearly later than the crystallization

<sup>1</sup>) The drawings of fig. 1—5 have been made by Mr. W. F. M. KIMPE.

<sup>2</sup>) The colourless and light-coloured greenish or brownish micas are taken together as muscovite.



of the muscovite because the crystals are bended. During the deformation there has been adjustment by differential movements in the limbs of the folds.

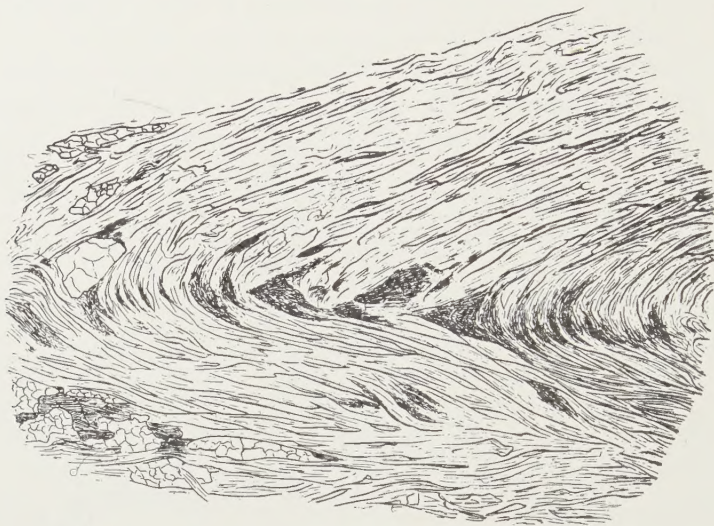


Fig. 2. Folded micaschist on the lower eastern slope of Mt Nuolja (Swedish Lapland). The biotite is found near the bends, the muscovite in the limbs of the folds. Enlargement  $\times 86$ .

The appearance of biotite at places of relief from stress is shown in a different way in rocks which are found higher up the eastern slope of Mt Nuolja below the lowest intercalations of limestone. These rocks are as a rule somewhat coarser grained than the normal hartschiefer and they contain numerous felspar eyes (potash felspar and acid plagioclase, mostly albite) up to more than 2 cm in length. Some of the rocks are

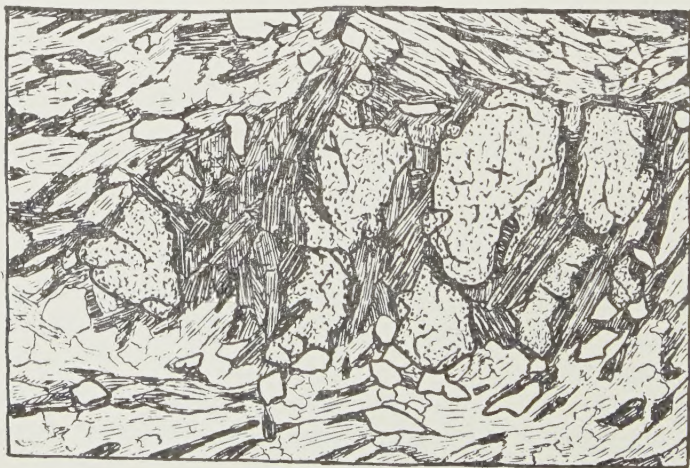


Fig. 3. Broken garnet in a hartschiefer with muscovite, biotite and felspar eyes on the eastern slope of Mt Nuolja. Large and thick crystals of biotite have accumulated in the fractures. Enlargement  $\times 174$ .

characterized by the occurrence of large crystals of muscovite. The larger feldspar eyes are sometimes broken and then resemble the broken feldspars of the intercalations in the hartschiefer in the Abiskojokk. Their twinning lamellae and cleavage cracks sometimes show strong bending. There are also cracked titanites, garnets and minerals of the epidote group. The garnet has more or less rounded forms and when it is cracked the pieces are sometimes strongly torn apart with fractures which are more or less normal to the schistosity (Fig. 3). The cracks afforded protection from shearing and here larger and thicker crystals of biotite could develop. The biotite is also found in thinner crystals outside the garnets but here muscovite, which does not enter into the cracks, is by far the principal mica.

In other broken garnets of which the pieces have not been torn apart biotite is also found in the cracks and moreover it is accumulated on both sides of the garnet crystal where this afforded protection from the lateral pressure as is seen in figure 4 in the left upper and the right lower part of the figure. On the other sides of the garnet crystal the schistosity is shown by the more or less parallel orientation of the muscovite.

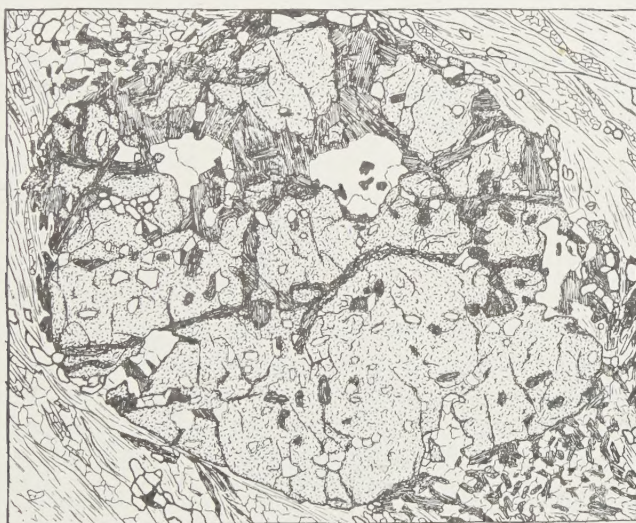


Fig. 4. Garnet, which has more or less preserved its original form. Same rock as fig. 3. Biotite (dark) with quartz in the cracks and in the protected parts outside. Enlargement  $\times 90$ .

Clear examples of differentiation of the micas are found in the feldspathic intercalations in the hartschiefer of the Abiskojokk. The fractures in the feldspars are often more or less normal to the schistosity, the feldspar fragments have been torn apart and in the spaces between them biotite is found with much blastic quartz. There is also some recrystallization of feldspar near the borders of the fragments. The muscovite bands of the hartschiefer along the borders of the feldspathic intercalations bend into the open spaces between the feldspar fragments but do not enter into the narrower parts



of the fractures, which in the example shown in figure 5 (between the two larger felspar fragments in the upper part of the figure) are filled with blastic quartz and biotite. This shows the movement of the muscovite bands. The deformation and the movement in the muscovite bands is further illustrated by the crystallization of biotite and quartz at places which were protected from lateral pressure, whereas at the places of greatest pressure the muscovite bands border directly upon the felspar. In the upper part of figure 5 there is no crystallization of biotite between the muscovite band and the left border of the felspar fragments, but biotite crystallized on the "leeward" side. In the muscovite bands there are streaks of local relief from stress, in which biotite was stable; they illustrate the deformation and movement in the muscovite bands themselves.



Fig. 5. Border between banded hartschiefer and felspathic intercalation in the Abiskojoek (Swedish Lappland). Muscovite band of the hartschiefer in the upper part of the figure. Biotite (dark) in streaks in the muscovite band and on the "leeward" side of the felspar border. In the open spaces between the felspar fragments of the felspathic intercalation blastic quartz and biotite have crystallized. Enlargement  $\times 26$ .

The biotite crystals reach their largest dimensions in the open cracks between the felspar fragments proving that there existed the most favourable conditions for their formation. In the neighbourhood of felspar fragments the biotite is mostly found directly on their border, the quartz filling up the rest of the open spaces. This shows that the biotite crystallized first in the fractures.

#### *Distribution of mica in the hartschiefer.*

Banding is a macroscopical feature of many hartschiefer and in the more massive and schistose types banding of smaller dimensions is generally also seen under the microscope by the alternation of zones of different colour and mineralogical composition.

The separation of biotite and muscovite (including pale green and pale brown mica) is sometimes pronounced. There are bands which nearly entirely consist of muscovite and there are bands in which biotite is the only mica which occurs together with much quartz and feldspar. But often the separation of the two micas is not pronounced and in some bands they are found together in about equal quantities with varying amounts of feldspar and quartz. There are also quartzitic bands and bands with feldspar and quartz in different relative proportions in which no mica is found.

The biotite only occurs in crystals of microscopic dimensions. The largest crystals are found in the coarse grained feldspathic intercalations, where they have crystallized in thick crystals without a definite orientation after the breaking-down of the feldspars in places of relief from stress. The muscovite is generally also of microscopical dimensions, it is exceptionally found in large crystals up to 2 cm in diameter and it always tends to take on a definite orientation.

The relations between the feldspathic intercalations and the hartschiefer in the Abiskojøkk prove that these rocks have, at least partly, been formed from coarse grained highly feldspathic rocks by recrystallization proceeding concurrently with the cataclastic process. The muscovite has been formed at the expense of the potash feldspars and the initial stage of this mineralogical change can still be seen where thin films of muscovite occur along planes of discontinuity, which intersect the feldspathic intercalation. In a more advanced stage there is a thickening of the muscovite bands and an increased breaking-down of the feldspars. The quartz and biotite, which crystallized in the feldspathic bands at places of relative relief from stress, are more and more influenced by the directional element imported into the process of recrystallization. In the muscovite bands, which grow at the expense of the feldspathic bands with quartz and biotite, a recrystallization of biotite — often together with some quartz — can be observed. The separation of biotite from muscovite was pronounced during the earlier cataclastic stages when cracks opened in the large feldspar crystals. The surfaces of discontinuity, along which the muscovite was formed, gradually increased in number, the feldspathic bands were rolled out further and the biotite in these bands recrystallized in smaller and thinner crystals.

In the rocks with feldspar eyes on the lower slopes of Mt Nuolja the separation of biotite and muscovite is not nearly so pronounced. The other minerals (garnet, titanite, epidote etc.) are mainly concentrated in zones which are also rich in both muscovite and biotite and the original stratification has not been entirely obliterated by differential movement and recrystallization. The large muscovite crystals, which occur in some of these rocks, show bending and undulous extinction, which proves that the movements have continued after their crystallization.

#### *Summary.*

A series of rocks, which partly still shows the characteristics of feldspathic



sediments with a varying felspar content was involved in the great overthrusts of caledonian time and reached a considerable depth of cover. Banded rocks were formed by cataclastic changes which proceeded concurrently with recrystallization and the temperature was high enough for the crystallization of both biotite and muscovite. In some banded rocks the felspars have been reduced to lenticular shape and an original stratification has not been entirely obliterated. In other banded rocks the banding has no relation to an original stratification, but in them a mineralogical heterogeneity was set up as a mechanical effect in the first stages of metamorphism and was extended during the later stages.

Particularly in the latter rocks there was a pronounced separation of biotite from muscovite during the early stages of metamorphism. In cracks, which opened in the felspars, biotite crystallized in thick crystals with the more soluble minerals at places of relief from shearing stress. In these stages there may have been relatively broad bands without muscovite and mainly consisting of large felspar fragments, quartz and biotite. During the later stages of rolling out and recrystallization the feldspathic bands decreased in thickness and a stronger influence of the directional element was imported into the process of recrystallization, while there was only a minor selective effect with regard to the separation of the — now small and thin — crystals of biotite from muscovite.

In other petrogenetic processes the separation of the micas is also found. It is well known in magmatic differentiation, and in sedimentary differentiation biotite is much more affected by weathering and transportation with the result that muscovite is the common mica in sedimentary rocks.

---



**Physics.** — *La pression du toit sur le charbon près du front dans les exploitations par tailles chassantes.* Par F. K. TH. VAN ITERSON. (I).

## DEUXIÈME CHAPITRE.

### Répartition des pressions après écrasement du charbon.

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

#### § 1. *Introduction.*

Dans le premier chapitre nous avons calculé d'après la méthode de la théorie de l'élasticité, la distribution des pressions autour d'une fente dans le rocher, comprimé également dans tous les sens.

Ce problème était identique à celui de calculer les pressions autour d'un vide créé par l'exploitation de la veine de charbon sur une largeur limitée sous la supposition que l'épaisseur de la veine est négligeable ou plus précisément dit, nous avons pour ce calcul remplacé le charbon par de la matière indéformable, ou pour le dire en terme mathématique, nous avons admis que la surface de contact entre roche et charbon restait plate.

Plus loin dans cette étude on verra que ce problème, traité dans le chapitre premier, est intéressant pour l'ingénieur des mines, mais pour le moment nous nous y référons pour démontrer qu'en réalité la solution ne s'applique pas au cas indiqué par le titre de notre étude précédente.

Le résultat des calculs du chapitre premier est représenté dans la figure 1.

En formule la pression  $\sigma_z$  sur le charbon en fonction de  $y$  est

$$\sigma_z = \frac{y}{\sqrt{y^2 - b^2}} p$$

or la pression au ras du front pour  $y = b$  devient infiniment grande.  $p$  étant la pression uniforme régnant à une telle distance de l'exploitation que l'influence de celle-ci peut être considérée comme amortie.

Mais les surfaces du charbon en contact avec le rocher ne peuvent pas être considérées comme indéformables, au contraire notre houille est très fragile, la résistance à l'écrasement est de l'ordre de 35 kg par cm<sup>2</sup>.

A présent les Mines de l'Etat néerlandais exploitent des couches situées entre 400 et 800 m de profondeur. Le poids spécifique des morts terrains et du terrain houiller évalué à 2,5 en moyenne, la pression dans le terrain vierge  $p$  est de 100 à 200 kg par cm<sup>2</sup>. Cette pression  $y$  règne dans tous les sens. Mais, comme nous avons prouvé dans notre étude préalable, les pressions dans le toit et dans le mur (le sol) sont nulles près des surfaces

mises à nu par l'exploitation et augmentent jusqu'à devenir  $p$  dans le rocher éloigné de ces surfaces.

La pression sur le charbon à côté du front, qui devait devenir excessive-

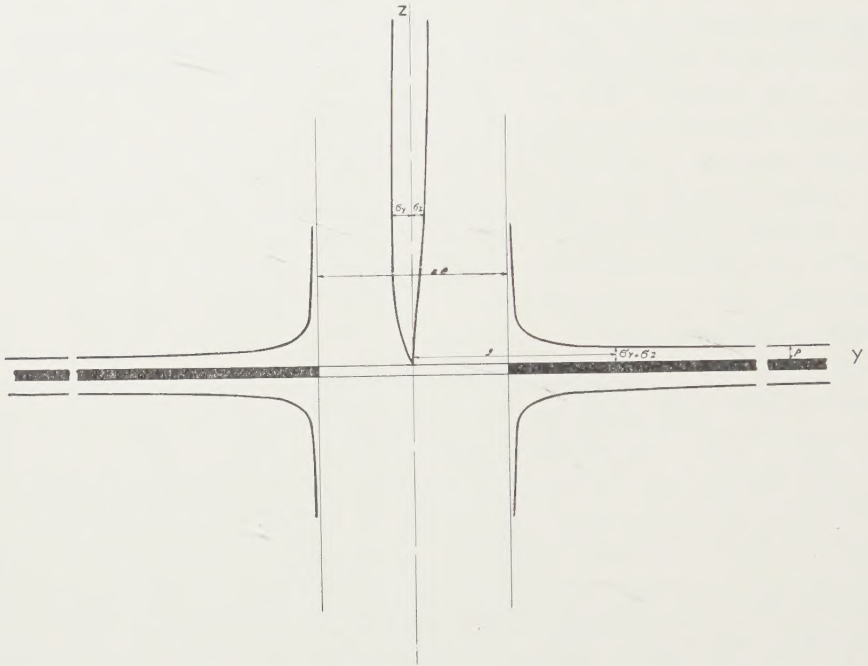


Fig. 1. Répartition de la pression du toit et du mur (sol) à côté d'un vide ou d'une bande de charbon exploitée. Le charbon supposé indéformable.

ment grande, ne peut pas atteindre une valeur supérieure à la résistance à l'écrasement de la matière la plus tendre, qui est en général le charbon. Ainsi la représentation, que donne la figure 1, est contraire à la réalité. Au lieu de devenir infiniment grande au ras du front, la pression n'y atteint qu'une valeur minime.

§ 2. *La pression dans le toit et dans le mur près du front, en considérant le charbon comme de la matière uniformément résistante, comprimée entre toit et mur parfaitement lubrifiés.*

Un des phénomènes surprenants se manifestant dans les exploitations minières est l'effet du temps. Nous n'en parlons pas à présent, mais supposons, que les tensions supputées par nos formules, sont complètement développées.

Un coup d'oeil sur la figure 1 et sur les chiffres donnés dans § 4 nous apprend que le charbon près du front ne résiste pas à la charge. Peut-être objectera-t-on, qu'on n'a pas tenu compte de l'élasticité de la couche de charbon d'une épaisseur d'environ un mètre. Mais même si l'on laisse de côté le calcul selon les lois de l'élasticité et qu'on ne pense qu'à la seule pression sur le charbon, correspondant à la profondeur, on trouve que déjà



sur le charbon inexploité la pression surpasse de beaucoup la résistance à l'écrasement et fait que le charbon s'écoule dans le vide créé.

Dans un chapitre suivant nous verrons qu'un peu de soutènement contre la face libre du charbon provoque une résistance inattendue contre la pression du toit. Mais pour le moment nous n'y pensons pas et même nous faisons une autre supposition qui conduit à une impossibilité, nous négligeons le frottement du charbon se déplaçant entre toit et mur.

La solution à laquelle conduit le calcul suivant a seulement une signification physique pour le cas où la pression atteint exactement la résistance à l'écrasement sur toute la surface de contact entre rocher et charbon; pour fixer les idées cela sera le cas à 200 m de profondeur avec du charbon à 50 kg par cm<sup>2</sup> de résistance.

Afin de rendre cet article plus lisible, nous donnons les calculs dans des annexes. (Voir annexe 1.)



Fig. 2. Le charbon exerce une pression uniforme  $p_0$  à côté de la bande exploitée. Notations pour le calcul de la distribution des pressions.

Si nous comptons les pressions comme des tensions positives, désignons (Fig. 2) par  $\sigma_z$  et  $\sigma_y$  les composantes normales et par  $\tau$  la tension de cisaillement, nous obtenons pour le point  $y, z$  défini pour cette occasion par les angles  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$

$$\sigma_z = p_0 - \frac{p_0}{2\pi} (2\varphi_1 - 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2)$$

$$\sigma_y = p_0 - \frac{p_0}{2\pi} (2\varphi_1 - 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2)$$

$$\tau = \frac{p_0}{2\pi} (\cos 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_2).$$

Il est utile de discuter la répartition des tensions pour ce cas et de les comparer avec celle de la figure 1.

Comme là,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$  près de la surface libre du toit et du mur sont nulles et, résultat plus curieux, les deux tensions  $\sigma_z$  et  $\sigma_y$  dans le rocher sont comme dans l'autre cas égales le long de l'axe des  $y$  c.à.d. pour la surface du contact avec la veine, et limitées à la charge d'écrasement du charbon  $p_0$ .

On serait tenté de croire que ces deux tensions égales sont en même temps les tensions principales, mais quand on poursuit l'étude et trace quelques trajectoires de tensions on trouve que celles-ci, indiquant les directions principales, croisent l'axe des  $y$  sous des angles de  $45^\circ$  et

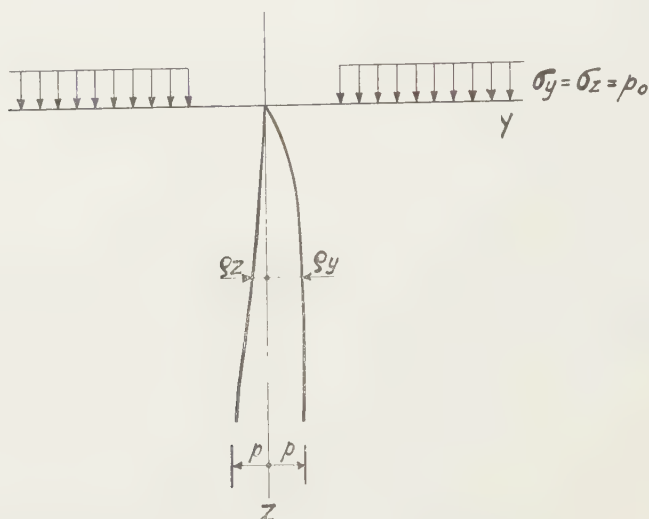


Fig. 3. Répartition des tensions (pressions) principales  $q_y$  et  $q_z$  selon l'axe des  $y$  et l'axe des  $Z$  pour le rocher, comprimant le charbon sans frottement jusqu'à la limite d'écrasement  $p_0$ .

ressemblent à celles représentées dans notre étude précédente (Proceedings Vol. XLII No. 2, 1939, p. 102 fig. 13) construites pour le cas de la figure 1 de cette étude.

En comparant les figures 1 et 3 on remarque aussi la ressemblance de la répartition des pressions le long de l'axe des  $Z$ .

Le problème qui nous occupe ne diffère de celui traité par NADAI dans son livre Plasticity<sup>1)</sup> que par la superposition  $p_0$ . Ce cas a été amplement étudié mathématiquement et confirmé par des expériences photo-élastiques, ce qui prouve la validité de cette sorte de calculs.

Nous devons faire une observation qui se base sur l'étude de NADAI.

Déjà nous avons remarqué qu'en soutenant la face du charbon, il est possible de rendre la couche de charbon très résistante; nous le prouverons au § 6. Il est même facile d'obtenir que le charbon se comporte comme de la matière plus dure que le schiste du toit. Supposons maintenant, et alors nous sommes assez proches de la réalité, que le schiste est une matière plastique dans laquelle les plans de glissement, les fissures, se produisent selon les surfaces où les tensions de cisaillement sont au maximum. On peut calculer la forme de ces surfaces et chercher plus spécialement la surface

<sup>1)</sup> NADAI, Plasticity, 1936, p. 247.

MESMER, Vergleichende spannungsoptische Untersuchungen und Fließversuche unter konzentriertem Druck. Technische Mechanik und Thermodynamik I, 85 (1930).



où ces tensions gagnent leur plus grande valeur et l'on trouve, que les surfaces pour  $\tau_{max}$ , sont des cylindres, et le maximum absolu

$$\tau_{max} = \frac{p_0}{\pi} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{p_0}{\pi}$$

est trouvé pour le demi cylindre décrit dans le rocher au-dessus du vide créé dans la couche de charbon (figure 4).

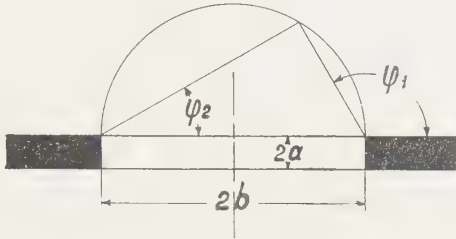


Fig. 4. Si la rupture se produit selon les surfaces de tensions de cisaillement maximum, le dôme d'affaissement prend la forme cylindrique.

Très souvent les bancs de schiste constituant le toit dans un terrain régulièrement stratifié possèdent des qualités de dureté et de plasticité différentes, mais néanmoins on constate que le dôme, qui se forme au dessus d'une taille, est en général en bon accord avec la théorie.

Pour entrer dans le sujet nous avons commencé avec ce cas relativement simple, mais avant de continuer à étudier d'autres cas de la distribution de la pression dans le toit et le mur près du vide dans la couche après écrasement du charbon, il est opportun d'exposer la répartition des tensions suivant les lois de l'élasticité avant que des ruptures se produisent dans le massif, soit parce qu'on exploite à faible profondeur où que la résistance à la compression du terrain houiller est telle, que nulle part les tensions ne surpassent cette résistance.

Par ce long chemin nous nous approchons pas à pas des problèmes posés par la nature.

### § 3. La distribution de la pression autour des creux dans le massif homogène selon les lois de l'élasticité.

La pression autour d'un puits, d'une galerie, d'un bouveau.

Si nous imaginons un bloc de roche, situé en profondeur dans une zone inaccessible à notre vue, ce bloc peut être considéré comme étant soumis à une compression égale dans tous les sens, que nous appelons  $p$ . Mais après le creusement d'une ouverture cylindrique on a, comme nous l'avons exposé dans le premier chapitre p. 94 (Proceedings Vol. XLII No. 2, 1939) la distribution selon LAMÉ, exprimée en formules

$$\varrho_1 = p \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \quad \varrho_2 = p \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)$$

pour les tensions tangentielle et radiales à la distance  $r$  du centre, comme

représentées en la figure 5. On voit qu'à la paroi d'un tunnel la tension est le double de celle qui règne dans le rocher intact, mais que l'élévation est amortie à peu de distance du vide.

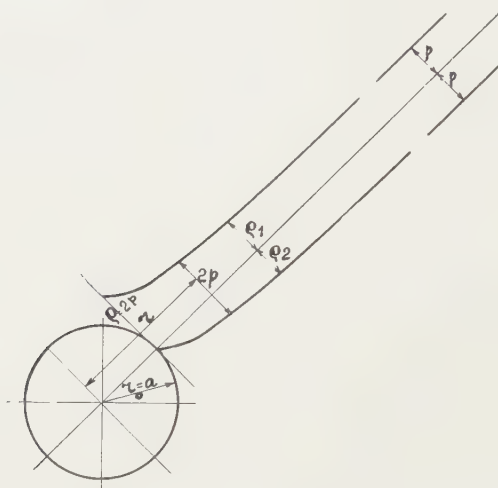


Fig. 5. Distribution de la pression autour d'une galerie ou d'un puits cylindrique, selon les formules de LAMÉ.

INGLIS <sup>1)</sup> a calculé les tensions autour d'un trou de forme elliptique et indiqué que ses formules nous permettent d'évaluer la répartition de la pression dans les coins arrondis d'ouvertures carrées et rectangulaires. Ces résultats sont parfaitement confirmés par des expériences photo-élastiques; nous employons la connaissance ainsi acquise pour signaler l'influence du rayon d'arrondissement sur l'élévation des tensions dans les coins du tunnel ou du trou, au moyen des figures 6, 7 et 8;  $q_1$  et  $q_2$  sont les tensions principales le long de la diagonale.

On s'étonnera de la divergence totale entre la seconde tension principale  $q_2$  dans la figure 8 et  $q_2$  dans les autres figures. Mais cette disparité disparaît quand on construit les figures intermédiaires entre 7 et 8, c.à.d. pour des rayons d'arrondissement plus petits que  $r = \frac{a}{4}$ . Alors on s'aperçoit que  $q_2$  possède un maximum, qui s'accroît et s'approche du coin, à mesure que  $r$  diminue et qui devient  $q_1 = q_2 = \infty$  quand  $r$  se resserre à zéro.

Une autre particularité que l'ingénieur des mines doit observer, est que, déjà à peu de distance du coin la pression la plus grande  $q_1$  ne diffère pas beaucoup dans les quatre figures. L'influence locale amortit même plus rapidement près des angles aigus qu'autour du cercle.

Tout travailleur du fond a observé que les plans de clivages sont

<sup>1)</sup> C. E. INGLIS, Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. Transactions of the Institution of Naval Architects, 1911, Part I, p. 219.

C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, Technische Dynamik, 1939.



parallèles aux grandes pressions. Si l'on fait des essais de compression

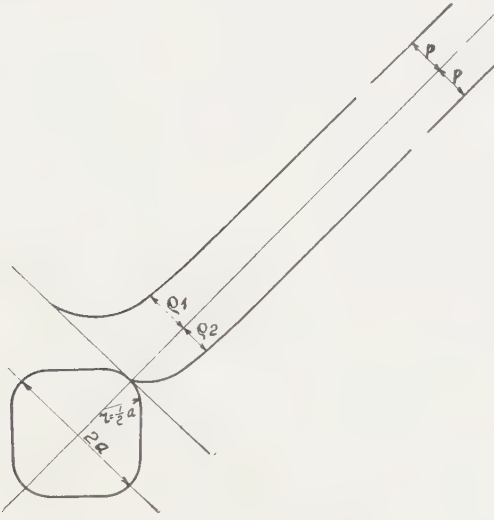


Fig. 6. Galerie ou puits de section carrée aux angles arrondis de rayon  $r = \frac{a}{2}$ .

Diagonale  $2a$  égale au diamètre du cylindre de fig. 5.

sans frottement des surfaces de pression, on constate que les cubes se fendent en colonnes parallèles rangées dans le sens de la pression.

Ainsi la remarque essentielle à faire à propos de la répartition de la

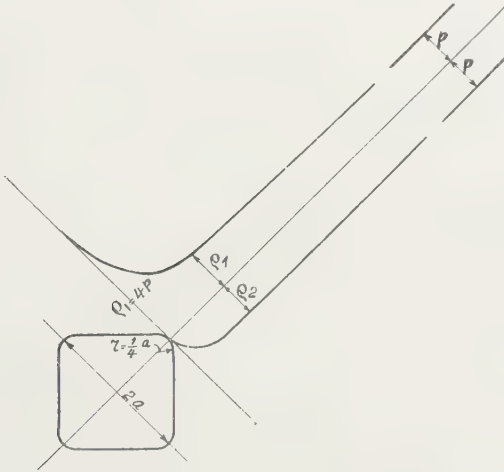


Fig. 7. Galerie ou puits de section carrée, arrondissement  $r = \frac{a}{4}$ . Même diagonale.

pression indiquée dans les figures, est que pour la matière dure et cassante comme le rocher, les plans de clivages prennent origine aux coins, selon la pression  $Q_2$ , et il faut s'attendre à voir fracturer toit, parois et mur selon des plans perpendiculaires aux diagonaux. Une voûte d'éboulement et des

parois bombées doivent se former. Ainsi la galerie obtient la forme idéale

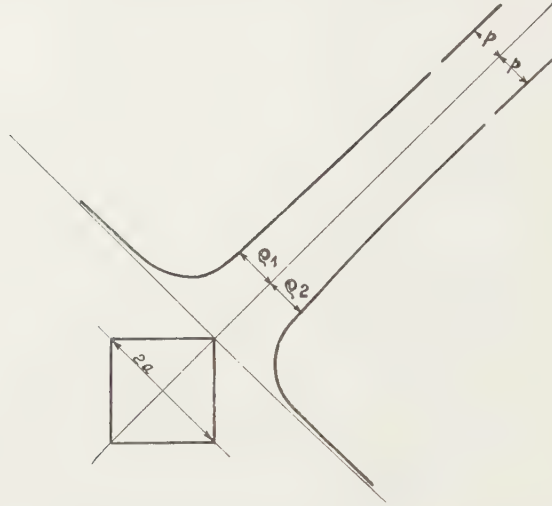


Fig. 8. Galerie ou puits de section carrée, aux coins aigus.

c.à.d. la forme cylindrique. Pour le mur (sol) on s'apercevra moins de cette dislocation caractéristique des roches. La gravité perturbe un peu la distribution des pressions indiquée dans les figures, mais son influence est négligeable comparée à celle de la cavité qui provoque la concentration de pressions que nous venons de signaler; elle est néanmoins à même de cacher le fait que la dislocation des roches se manifeste aussi dans le sol de la galerie, parce qu'elle tient les morceaux à leur place.

Pour démontrer par un exemple l'influence de l'arrondissement des coins nous désignons par  $k$  la résistance à la pression (en moyenne  $k = 500$  kg par  $\text{cm}^2$  pour du schiste de bonne qualité) par  $\gamma = 2,5$  le poids spécifique du terrain, par  $h$  la profondeur où la résistance à la compression est justement atteinte aux coins de la galerie. Alors nous pouvons résumer dans une table le résultat de ces calculs; la diagonale a toujours la longueur  $2a$ .

$$q_1 \max = k \quad p = \frac{h}{10} \gamma$$

Rayon d'arrondissement:	Tensions principales:		Profondeur à laquelle la résistance à l'écrasement $k = 500 \text{ kg/cm}^2$ est atteinte:
$r = a$	$q_1 = 2p$	$q_2 = 0$	$= 1000 \text{ m}$
$r = \frac{a}{2}$	$q_1 = 2,828 p$	$q_2 = 0$	$= 695 \text{ m}$
$r = \frac{a}{4}$	$q_1 = 4p$	$q_2 = 0$	$= 500 \text{ m}$
$r = 0$	$q_1 = \infty$	$q_2 = 0 \text{ et } q_2 = \infty$	$= 0 \text{ m}$





Tension (pression) tangentielle autour de l'ouverture

$$\varrho_1 = 2p \frac{a^2 + b^2 - r^2}{ab}.$$

(figure 9). Répartition des deux tensions principales le long de l'axe des  $Y$

$$\varrho_1 = \frac{y(y^2 - a^2 + 2b^2)}{(y^2 - a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} p \quad \varrho_2 = \frac{y(y^2 - a^2)}{(y^2 - a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} p.$$

Pour l'axe des  $Z$  on remplace  $y$  par  $z$  et change  $a$  et  $b$ .

Pour les bouts des axes principaux de l'ellipse on trouve pour  $r = a$   
 $\varrho_1 = 2 \frac{a}{b} p$  et pour  $r = b$   $\varrho_1 = 2 \frac{b}{a} p$ .

Pour le cercle, pour  $a = b = r$ , on obtient les formules de LAMÉ, de la distribution des tensions autour du cylindre.

Avant de conclure ce paragraphe nous donnons en la figure 10 la distribution des tensions autour d'une cavité sphérique creusée dans le rocher. Il faut la comparer avec celle de figure 4 et on remarque que la

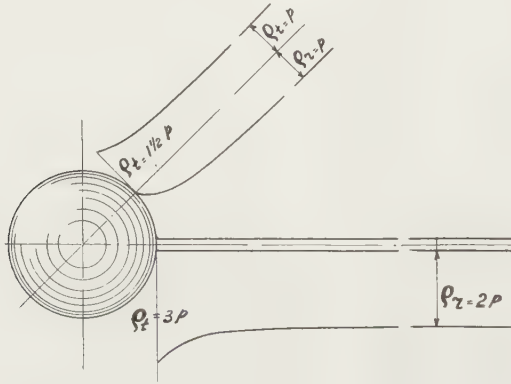


Fig. 10. Distribution des pressions autour d'une cavité sphérique et autour de la galerie d'entrée cylindrique.

perturbation de la pression homogène s'est moins accentuée. En effet l'élévation de la pression n'est que la moitié,  $\varrho_{max.} = \frac{3}{2} p$  au lieu de  $\varrho_{max.} = 2p$ , et l'amortissement est plus rapide. Mais on ne saurait pas exécuter le creux sans pratiquer une galerie d'accès et si l'on n'arrondit pas la jonction, les tensions doublent au cercle de section de cylindre et sphère et deviennent  $\varrho = 3p$ .

**Mathematics.** — *Ueber affine Invarianten bei Kegelschnitten.* Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

*Uebersicht.* Eine ternäre quadratische Form und eine Linearform in Punktkoordinaten haben bei der speziellen affinen Gruppe fünf ganze rationale Invarianten, aus denen sich zwei absolute Invarianten bilden lassen. Wir geben für die letzteren eine geometrische Deutung bei der Figur, die aus einem Kegelschnitt und einer Geraden besteht und lösen im Anschlusse hieran einige naheliegende Fragen der Affingeometrie.

§ 1.

Es seien

$$f = \sum_{i,k=1,2,3} a_{ik} x_i x_k = (a' x)^2, \quad (v' x) = \sum_1^3 v'_i x_i. \quad (1)$$

eine ternäre quadratische Form und eine lineare Form in homogenen Punktkoordinaten  $x_1 : x_2 : x_3$ . Die uneigentliche Gerade der affinen Ebene denken wir uns gegeben durch die Gleichung

$$(l' x) = \sum l'_i x_i = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = x_3 = 0, \quad (2)$$

halten sie also durch den Buchstaben  $l'$  fest.

Man beweist dann leicht nach allgemeinen Methoden<sup>1)</sup>, dass die zwei Formen (1) ein kleinstes volles System von ganz-rationalen affinen Invarianten besitzen, das aus folgenden fünf Bildungen besteht:

$$\left. \begin{aligned} D &= \tfrac{1}{6} (a' b' c')^2 & C &= \tfrac{1}{2} (a' b' l')^2 \\ \phi &= \tfrac{1}{2} (a' b' v')^2 & M &= \tfrac{1}{2} (a' b' v') (a' b' l') & U &= (a' v' l')^2 \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

Hier ist  $D$  die Diskriminante von  $f$ ,  $D=0$  gibt Entartung des Kegelschnittes  $f=0$ ,  $C=0$  gibt bei  $D \neq 0$  die Parabeln.  $\phi=0$  ist bei veränderlichen Linienkoordinaten  $v'$  die Gleichung von  $f$  in Linienkoordinaten.  $M=0$  sagt aus, dass die Gerade  $v'$  durch den Mittelpunkt  $m$  von  $f$  geht. Schliesslich ist bei veränderlichem  $v'$   $U=0$  die Gleichung der beiden uneigentlichen oder unendlich-fernen Punkte von  $f$ .

<sup>1)</sup> Vgl. z.B. meine „Invariantentheorie“, Groningen (1923), p. 223 ff.



Die nicht-symbolischen Ausdrücke für diese Komitanten lauten:

$$\left. \begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & C &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \\ \phi &= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v'_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v'_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v'_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 & 0 \end{vmatrix} & M &= v'_1 (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) + \\ & & & + v'_2 (a_{13} a_{12} - a_{11} a_{23}) + \\ & & & + v'_3 (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) \\ & & U &= a_{11} v_2'^2 - 2a_{12} v'_1 v'_2 + a_{22} v_1'^2 \end{aligned} \right\} (3b)$$

Wie man ebenfalls leicht nachweist, besteht zwischen diesen fünf Komitanten eine einzige Syzygie

$$C \cdot \phi = D \cdot U + M^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Sie drückt geometrisch aus, dass  $f$  als Klassenkegelschnitt der durch  $U=0$  und  $M=0$  bestimmten Schaar angehört.

## § 2.

Auf Grund der Gleichung (4) können wir uns bei der Bestimmung von *absoluten* Invarianten auf nur vier der fünf Komitanten (3a) beschränken. Lassen wir  $D$  weg, so gibt der Ansatz

$$J = C^a \phi^b M^c U^d,$$

da  $J$  vom Grade Null in den Koeffizienten  $a_{ik}$  und in den Linienkoordinaten  $v'_i$  sein muss, für die Gradzahlen  $a, b, c$  und  $d$  die Gleichungen

$$2a + 2b + 2c + d = 0 \quad , \quad 2b + c + 2d = 0,$$

woraus

$$b = -\frac{1}{2}c - d \quad \text{und} \quad a = -\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d,$$

also

$$J = \frac{C^{\frac{1}{2}d}}{C^{\frac{1}{2}c} \phi^{\frac{1}{2}c+d}} M^c U^d = \left( \frac{M}{C^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}}} \right)^c \cdot \left( \frac{U C^{\frac{1}{2}}}{\phi} \right)^d$$

folgt. Es sind also

$$\alpha = \frac{M^2}{C \phi} \quad \beta = \frac{C U^2}{\phi^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

zwei rationale absolute Invarianten, durch die alle weiteren absoluten affinen Invarianten ausdrückbar werden.

Im reellen Falle und bei  $\Phi < 0$  wollen wir von zwei positiven absoluten

Invarianten  $R$  und  $S$  Gebrauch machen, die wir durch die Gleichungen definieren

$$R^2 = -\frac{1}{a\beta} = -\frac{\phi^3}{M^2 U^2}, \quad S^2 = -\frac{a}{\beta} = -\frac{M^2 \phi}{C^2 U^2} \quad \dots \quad (6)$$

Es ist dann umgekehrt

$$\alpha = \begin{cases} -\frac{S}{R} & \text{bei } C > 0 \\ +\frac{S}{R} & \text{bei } C < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \beta = \begin{cases} +\frac{1}{RS} & \text{bei } C > 0 \\ -\frac{1}{RS} & \text{bei } C < 0 \end{cases} \quad \dots \quad (7)$$

und mit Hilfe von (4) erhalten wir die Formeln

$$\left. \begin{aligned} \frac{C\phi}{DU} &= \frac{1}{1-\alpha} = \frac{R}{R+S} \text{ bei } C > 0, & = \frac{R}{R-S} \text{ bei } C < 0; \\ \frac{M^2}{DU} &= \frac{a}{1-\alpha} = -\frac{S}{R+S} \text{ bei } C > 0, & = \frac{S}{R-S} \text{ bei } C < 0; \\ \frac{M^2 C \phi}{D^2 U^2} &= \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = -\frac{RS}{(R+S)^2} \text{ bei } C > 0, & = \frac{RS}{(R-S)^2} \text{ bei } C < 0; \\ \frac{D^2}{C^3} &= \frac{(1-\alpha)^2}{\beta} = \frac{S}{R} (R+S)^2 \text{ bei } C > 0, & = \frac{S}{R} (R-S)^2 \text{ bei } C < 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die durch (6) definierten absoluten Invarianten  $R$  und  $S$  haben eine einfache geometrische Bedeutung. Bei den reellen Transformationen der speziellen affinen Gruppe (mit der Transformationsdeterminante  $= 1$ ) ist der Flächeninhalt eines durch die drei Punkte  $y$ ,  $z$  und  $t$  bestimmten Dreieckes gegeben durch

$$F = \frac{1}{2} \frac{(yzt)}{(l'y)(l'z)(l't)} \quad \dots \quad (9)$$

Wir denken uns nun die Gerade  $v'$  durch ihre zwei Schnittpunkte  $y$  und  $z$  mit dem Kegelschnitte  $f=0$  gegeben. Dann haben wir

$$v'_k = (yz)_{ij} = y_i z_j - y_j z_i, \quad \dots \quad (10)$$

$$(a'y)^2 = 0, \quad (a'z)^2 = 0, \quad (a'y)(a'z) \neq 0. \quad \dots \quad (11)$$

Als Punkt  $t$  nehmen wir erstens in (9) den Pol

$$t_k = a_k (av') = (a'b')_{ij} (a'b'v') \quad \dots \quad (12)$$

der Geraden  $v'$ . Die Fläche  $F_1$  des Dreieckes  $yzt$  wird dann

$$F_1 = \frac{1}{2} \frac{(yza)(av')}{(l'y)(l'z)(a'b'l')(a'b'v')} = \frac{1}{2} \frac{(yza)(av')}{2M(l'y)(l'z)}.$$

Nach (10) wird hier der Zähler

$$(yza)(av') = (av')^2 = (a'b'v')^2 = 2\Phi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Weiters ist nach (11)

$$2\Phi = (a'b'v')^2 = [(a'y)(b'z) - (a'z)(b'y)]^2 = -2[(a'y)(a'z)]^2,$$

also

$$(a'y)(a'z) = \sqrt{-\Phi}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Ebenso hat man

$$U = (a'l'v')^2 = [(a'y)(l'z) - (a'z)(l'y)]^2 = -2(a'y)(a'z)(l'y)(l'z),$$

also nach (14):

$$(l'y)(l'z) = \frac{U\sqrt{-\Phi}}{2\Phi}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Demnach wird

$$F_1^2 = \frac{-\Phi^3}{M^2 U^2} = R^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

wodurch die Bedeutung der Invariante  $R$  von (6) ermittelt ist.

Zweitens nehmen wir in (9) bei einem Mittelpunktskegelschnitt  $t = m = \text{Mittelpunkt}$ , also

$$t_k = a_k(a'l') = (a'b')_{ij}(a'b'l').$$

Mit diesem  $t$  findet man auf analoge Weise für die Fläche  $F_2$  des Dreiecks  $mzy$ :

$$F_2 = \frac{1}{2} \frac{(azy)(a'l')}{(l'y)l'z} \cdot 2C$$

also nach (6) und (15):

$$F_2^2 = -\frac{M^2 \Phi}{C^2 U^2} = S^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$R$  und  $S$  sind also im reellen Falle und bei  $\Phi < 0$  die positiven Flächeninhalte der Dreiecke  $yzt$  und  $mzy$ .

### § 3.

Wir halten weiterhin daran fest, dass die Gerade  $v' = (yz)$  durch die beiden Punkte  $y$  und  $z$  auf  $f = 0$  gegeben sei. Die uneigentlichen Punkte von  $f$ , also die Schnittpunkte von  $f$  mit  $l'$  nennen wir  $U_1$  und  $U_2$ . Mit dem



Mittelpunkte  $m$  verbunden geben sie die Asymptoten von  $f$ . Deren Schnittpunkte mit  $v'$  seien  $V_1$  und  $V_2$ ,  $t = a(av')$  sei wieder der Pol von  $v'$  und die Tangenten in  $y$  und  $z$  mögen die uneigentliche Gerade  $l'$  in den Punkten  $Y$  und  $Z$  schneiden.

Für das Produkt der beiden Tangenten in  $y$  und  $z$  findet man leicht die Gleichung

$$(a'x)^2 \cdot \Phi - D \cdot (v'x)^2 = 0$$

und für das Produkt der Asymptoten

$$(\varphi'x)^2 = C \cdot (a'x)^2 - D \cdot (l'x)^2 = 0.$$

Setzt man hier für  $V_1$  und  $V_2$   $y + \mu z$ , so ergibt sich für  $\mu$  die Gleichung

$$(\varphi'y)^2 + 2\mu(\varphi'y)(\varphi'z) + \mu^2(\varphi'z)^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Das Doppelverhältnis

$$\varrho = (yz V_1 V_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

der vier Punkte  $y, z, V_1$  und  $V_2$  auf der Geraden  $v'$  wird dann  $\varrho = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ .

Daher wird

$$\varrho + \frac{1}{\varrho} = \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{\mu_1 \mu_2} - 2$$

also nach (18)

$$\varrho + \frac{1}{\varrho} + 2 = \frac{4[(\varphi'y)(\varphi'z)]^2}{(\varphi'y)^2 \cdot (\varphi'z)^2}.$$

Dies gibt, da wegen (14) und (15)

$$\frac{(a'y)(a'z)}{(l'y)(l'z)} = \frac{2\phi}{U} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

ist,

$$\varrho + \frac{1}{\varrho} - 2 = 16 \frac{C\phi}{DU} \left( \frac{C\phi}{DU} - 1 \right) = 16 \frac{C\phi}{DU} \frac{M^2}{DU} \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

oder nach (8):

$$\varrho + \frac{1}{\varrho} - 2 = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Hierdurch ist das Doppelverhältnis  $\varrho$  als irrationale absolute Invariante gegeben. In der rechten Seite von (21) haben wir Symmetrie bezgl. der Geraden  $v'$  und  $l'$ .  $\varrho$  ist daher auch gleich dem Doppelverhältnis der vier Punkte  $U_1, U_2, Y$  und  $Z$  auf der Geraden  $l'$ .

Vom Schnittpunkte der Geraden  $v'$  und  $l'$  aus lassen sich zwei Tangenten  $v' + \lambda l'$  an  $f$  legen, wobei für  $\lambda$  die Gleichung gilt

$$\phi + 2\lambda \cdot M + \lambda^2 \cdot C = 0.$$

Hieraus ergibt sich, so wie oben, für das Doppelverhältnis  $\vartheta$  der vier Geraden  $v', l'$  und der beiden Tangenten

$$\vartheta + \frac{1}{\vartheta} + 2 = \frac{4M^2}{C\phi}$$

was man mit Hilfe von (4) und (8) auch so schreiben kann:

$$\vartheta + \frac{1}{\vartheta} + 2 = 4a. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$\vartheta$  ist nichts anderes als das Teilverhältnis der drei Geraden:  $v'$  und die beiden zu  $v'$  parallelen Tangenten.

Wir berechnen schliesslich noch ein drittes Doppelverhältnis  $\tau$ : das der vier Punkte  $y, z, U_1$  und  $U_2$  auf  $f$ . Es ist gegeben durch das Doppelverhältnis der vier Geraden: Tangente in  $y$  an  $f$ , Gerade  $v'$ , die beiden Verbindungslinien von  $y$  mit  $U_1$  und  $U_2$ . Macht man für die beiden letztgenannten den Ansatz

$$w' = a'(a'y) + \mu v',$$

dann muss der Punkt  $(w'l')$  auf  $f$  liegen, d.h.  $(a'w'l')^2 = 0$  sein. Dies gibt

$$(a'b'l')(a'c'l')(b'y)(c'y) + 2\mu(a'b'l')(a'v'l')(b'y) + \mu^2(a'v'l')^2 = 0.$$

Hier kann man den ersten und den zweiten Term umformen und erhält

$$D \cdot (l'y)^2 + 2\mu M \cdot (l'y) - \mu^2 \cdot U = 0.$$

Hieraus folgt wieder für  $\tau = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ :

$$\tau + \frac{1}{\tau} + 2 = \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{\mu_1 \mu_2} = \frac{-4M^2}{DU},$$

also nach (8):

$$\tau + \frac{1}{\tau} + 2 = -\frac{4a}{1-a}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

#### § 4.

Wenn  $f=0$  eine reelle Ellipse ist und von den Geraden  $v'$  in zwei reellen Punkten  $y$  und  $z$  geschnitten wird, so zerschneidet  $v'$  die Ellipse in zwei Segmente  $P$  und  $Q$ . Wie drücken sich die Flächeninhalte dieser Segmente in den absoluten affinen Invarianten aus?

Wir denken uns auf einem der Bogen  $yz$  der Ellipse einen veränderlichen Punkt  $P_\lambda$  durch die Gerade

$$w' = v' + \lambda a' (a' y)$$

ausgeschnitten. Für  $\lambda = 0$  ist  $w'$  mit  $v'$ , für  $\lambda = \infty$  ist  $w'$  mit der Tangente in  $y$  identisch.

Der Punkt  $(u' w')$  muss dann auf  $f$  liegen, also

$$(a' w' u')^2 = (a' v' u')^2 + 2\lambda (a' v' u') (a' b' u') (b' y) + \lambda^2 (a' b' u') (a' c' u') (b' y) (c' y) = 0. \quad (25)$$

Hier wird das von  $\lambda$  freie Glied nach (11) und (14):

$$(a' v' u')^2 = [(a' y)(u' z) - (a' z)(u' y)]^2 = -2(u' y)(u' z)(a' y)(a' z) = -2\sqrt{-\phi}(u' y)(u' z).$$

Der Koeffizient von  $2\lambda$  wird, wenn wir  $(a' v' u') (b' y)$  umformen:

$$-\frac{1}{2}(a' b' v')(u' y)(a' b' u') = -\frac{1}{2}(u' y) \cdot (au')(av').$$

Der dritte Term in (25) wird auf analoge Weise

$$-\frac{1}{2}(a' b' c')(a' b' u')(c' y) \cdot (u' y) = -D \cdot (u' y).$$

Nach Weglassung des Faktors  $(u' y)$  erhalten wir also für  $P_\lambda$ :

$$(u' P_\lambda) = \lambda^2 \cdot D(u' y) + \lambda(au')(av') + (u' z) \cdot 2\sqrt{-\phi}. \quad (26)$$

Hieraus finden wir für die Fläche  $dP$  des Dreieckes  $y, P_\lambda, P_{\lambda+d\lambda}$ :

$$dP = \frac{1}{2} \frac{(y P_\lambda P_{\lambda+d\lambda})}{(l' y)(l' P_\lambda)^2} = \frac{-2\phi\sqrt{-\phi}}{(l' y)} \cdot \frac{d\lambda}{[\lambda^2 \cdot D(l' y) + 2M\lambda + 2(l' z)\sqrt{-\phi}]^2};$$

somit wird

$$P = \frac{-2\phi\sqrt{-\phi}}{(l' y)} \cdot \int_0^\infty \frac{d\lambda}{[\lambda^2 D(l' y) + 2M\lambda + 2(l' z)\sqrt{-\phi}]^2}. \quad (27)$$

Den Integrand gestalten wir wie folgt um:

$$P = \frac{2\phi\sqrt{-\phi}}{(l' y)} \cdot \frac{1}{D^2(l' y)^2} \cdot \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\left[ \left( \lambda + \frac{M}{D(l' y)} \right)^2 - \frac{M^2 - 2D\sqrt{-\phi}(l' y)(l' z)}{D^2(l' y)^2} \right]^2}$$

also, da wegen (15) und (4)

$$M^2 - 2D\sqrt{-\phi}(l' y)(l' z) = M^2 + DU = C\phi$$

ist

$$P = \frac{-2\phi\sqrt{-\phi}}{D^2(l' y)^3} \cdot \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\left[ \left( \lambda + \frac{M}{D(l' y)} \right)^2 - \frac{C\phi}{D(l' y)^2} \right]^2} \quad (28)$$



Nehmen wir zuerst den Fall einer reellen Ellipse  $C > 0$ , die von  $v'$  in zwei reellen Punkten  $y$  und  $z$  geschnitten wird, wo also  $\phi < 0$  ist. Dann ist  $C\phi < 0$  und wir erhalten im Nenner des Integranden den Ausdruck

$$\left(\lambda + \frac{M}{D(l'y)}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-C\phi}}{D(l'y)}\right)^2 = -\frac{C\phi}{D^2(l'y)^2} \left[1 + \left(\frac{\lambda D(l'y) + M}{\sqrt{-C\phi}}\right)^2\right].$$

Setzen wir also

$$\mu = \frac{\lambda D(l'y) + M}{\sqrt{-C\phi}} \quad . \quad d\lambda = \frac{\sqrt{-C\phi}}{D(l'y)} \cdot d\mu \quad , \quad \mu_0 = \frac{M}{\sqrt{-C\phi}}, \quad (29)$$

so entsteht:

$$P = -\frac{2\phi\sqrt{-C\phi}}{D^2(l'y)^3} \cdot \frac{D^4(l'y)^4}{C^2\phi^2} \cdot \frac{\sqrt{-C\phi}}{D(l'y)} \cdot \int_{\mu_0}^{\infty} \frac{d\mu}{(\mu^2 + 1)^2} = \pm \frac{2D}{C^{\frac{3}{2}}} \int_{\mu_0}^{\infty} \frac{d\mu}{(\mu^2 + 1)^2}.$$

Da weiters

$$\begin{aligned} \int_{\mu_0}^{\infty} \frac{d\mu}{(\mu^2 + 1)^2} &= \left[ \frac{\mu}{2(\mu^2 + 1)} + \frac{1}{2} \arctang \mu \right]_{\mu_0}^{\infty} = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\mu_0}{2(\mu_0^2 + 1)} - \frac{1}{2} \arctang \mu_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{M\sqrt{-C\phi}}{2DU} - \frac{1}{2} \arctang \frac{M}{\sqrt{-C\phi}} \end{aligned}$$

ist, wird schliesslich, mit  $\sqrt{-C\phi} > 0$ :

$$P = \pm \frac{D}{C^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{M\sqrt{-C\phi}}{DU} - \arctang \frac{M}{\sqrt{-C\phi}} \right\} \quad . \quad (30)$$

Für das zweite Segment Q, das die Gerade  $v'$  bei der Ellipse  $f$  bestimmt, erhält man auf dieselbe Art durch Integration zwischen den Grenzen  $-\infty$  und 0:

$$Q = \pm \frac{D}{C^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{M\sqrt{-C\phi}}{DU} + \arctang \frac{M}{\sqrt{-C\phi}} \right\} \quad . \quad (31)$$

Die Summe  $P + Q$  ergibt dann  $\pm \frac{\pi D}{C^{\frac{3}{2}}}$  als Flächeninhalt der ganzen Ellipse.

Drückt man in (30) die absoluten Invarianten durch  $R$  und  $S$  aus, so wird

$$P = \pm (R + S) \cdot \sqrt{\frac{S}{R}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{RS}}{R+S} - \arctang \sqrt{\frac{R}{S}} \right\} \quad . \quad (32)$$

wobei alle Wurzeln positiv genommen sind.

(30) und (31) gelten auch noch für den Fall  $\phi = 0$ , dann ist  $P = 0$  und  $Q$  gleich der Fläche der ganzen Ellipse.

Bei einer reellen Parabel  $C = 0$ , die von der Geraden  $v'$  in reellen Punkten geschnitten wird, ist wieder  $\phi < 0$ . Hier führt (28) auf das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\left(\lambda + \frac{M}{D(l'y)}\right)^4}$$

und schliesslich zur Formel

$$P = \pm \frac{2}{3} \frac{D\phi \sqrt{-\phi}}{M^3} = \pm \frac{2}{3} R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Bei einer reellen *Hyperbel* mit  $C < 0$  schneidet  $v'$  von einem Aste ein reelles Segment ab für  $\phi < 0$ ,  $DU < 0$ . In diesem Falle führt (28) auf ein Integral

$$\int \frac{d\mu}{(\mu^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \log \frac{\mu + 1}{\mu - 1} - \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu^2 - 1}$$

und man erhält als Endformel für das Segment  $P$ :

$$P = \pm \frac{D}{(-C)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{(M + \sqrt{C\phi})^2}{-DU} + \frac{M\sqrt{C\phi}}{DU} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

oder nach (8), ausgedrückt in den Invarianten  $R$  und  $S$ :

$$\pm P = S - (S - R) \cdot \sqrt{\frac{S}{R}} \cdot \log \frac{(\sqrt{R} + \sqrt{S})^2}{S - R} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

**Mathematics.** — *Zur Affingometrie der  $F_2$  im  $R_3$ .* Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

*Uebersicht.* Eine lineare und eine quadratische Form in vier Veränderlichen besitzen fünf ganz-rationale affine Invarianten, zwischen denen eine algebraische Abhängigkeit besteht. Aus diesen fünf Invarianten lassen sich für die speziell-affine Gruppe zwei absolute Invarianten bilden. Wir geben für diese letzteren eine einfache geometrische Deutung bei der entsprechenden Raumfigur, bestehend aus einer Ebene und einer Fläche zweiter Ordnung. Ist diese ein reelles Ellipsoid und schneidet die Ebene dasselbe, so entsteht eine Kalotte, deren Volumen wir durch die oben genannten absoluten Invarianten ausdrücken. Die entsprechenden Formeln geben wir auch für das zweischalige Hyperboloid und für das elliptische Paraboloid.

## § 1.

Es seien

$$(v' x) = v'_1 x_1 + v'_2 x_2 + v'_3 x_3 + v'_4 x_4 \text{ und } F = (a' x)^2 = \sum a_{ik} x_i x_k \quad (1)$$

die beiden quaternären Formen.

Die uneigentliche oder unendlichferne Ebene bezeichnen wir mit  $l'$  und setzen für den Zusammenhang mit gewöhnlichen Cartesischen Koordinaten  $x, y, z$  mit den homogenen Koordinaten  $x_i$ :

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

$$(l' x) = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = x_4.$$

Man beweist dann leicht, dass die beiden Formen (1) bei der allgemeinen affinen Gruppe nur die folgenden Invarianten besitzen:

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{1}{24} (a' b' c' d')^2, & C &= \frac{1}{6} (a' b' c' l')^2 = \frac{1}{6} (l' a)^2 \\ \Phi &= \frac{1}{6} (a' b' c' v')^2 = \frac{1}{6} (av')^2, & M &= \frac{1}{6} (a' b' c' v') (a' b' c' l') = \frac{1}{6} (av') (al') \\ & & U &= \frac{1}{2} (a' b' v' l')^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

In nicht-symbolischer Schreibweise haben wir:

$$D = \text{Det. } |a_{ik}|, \quad C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$



$$\Phi = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & v'_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v'_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v'_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & v'_4 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 & v'_4 & 0 \end{vmatrix}, M = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & v'_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v'_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v'_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & v'_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$U = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & v'_1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v'_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v'_3 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & v'_4 & 1 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 & v'_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v'_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v'_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v'_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

$D$  ist die Diskriminante von  $F$ .  $C=0$  gibt die Paraboloiden. Für veränderliche Ebenenkoordinaten  $v'$  gibt  $\Phi=0$  die Gleichung von  $F$  in Ebenenkoordinaten,  $M=0$  die Gleichung des Mittelpunktes und  $U=0$  die Gleichung des auf  $F$  gelegenen uneigentlichen Kegelschnittes.

Zwischen den fünf Invarianten (2) besteht eine einzige Syzygie

$$C \cdot \Phi = M^2 + D \cdot U. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wie bereits in (2) angedeutet, gebrauchen wir für die dreireihigen Determinanten  $(a' b' c')_{ijk}$  die Symbolreihe  $a$  und zwar in der Weise, dass

$$(u' a' b' c') = (u' a) = u'_1 a_1 + u'_2 a_2 + u'_3 a_3 + u'_4 a_4$$

wird. Es ist also

$$a_1 = + (a' b' c')_{234}, a'_2 = - (a' b' c')_{134}, a'_3 = + (a' b' c')_{124}, a'_4 = - (a' b' c')_{123}.$$

Allgemein setzen wir, wenn die Ebene  $v'$  durch drei Punkte  $y, z$  und  $t$  gegeben ist

$$(v' x) = (y z t x) = - \Sigma \pm x_1 y_2 z_3 t_4,$$

d.h. wir setzen:

$$v'_1 = - (y z t)_{234}, v'_2 = + (y z t)_{134}, v'_3 = - (y z t)_{124}, v'_4 = + (y z t)_{123}.$$

## § 2.

Wir suchen *absolute* Invarianten aus den Komitanten (2) aufzubauen. Wegen (3) kann man eine der fünf Komitanten, z.B.  $D$  weglassen und hat dann den Ansatz

$$J = C^a \Phi^b M^c U^d$$

mit den Gleichungen

$$3a + 3b + 3c + 2d = 0 \quad , \quad 2b + c + 2d = 0,$$

woraus

$$c = -\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b \quad \text{und} \quad d = \frac{3}{4}a - \frac{3}{4}b$$

folgen. Also wird

$$J = \frac{C^a \phi^b U^{\frac{3}{4}a}}{M^{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b} U^{\frac{3}{4}b}} = \left( \frac{CU^{\frac{3}{4}}}{M^{\frac{3}{2}}} \right)^a \cdot \left( \frac{\phi}{M^{\frac{1}{2}} U^{\frac{1}{4}}} \right)^b.$$

Somit sind z.B.

$$\alpha = \frac{C^4 U^3}{M^6}; \quad \beta = \frac{\phi^4}{M^2 U^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

zwei rationale, von einander unabhängige absolute Invarianten und jedes  $J$  lässt sich algebraisch durch sie ausdrücken. Wegen

$$\alpha\beta = \left( \frac{C\phi}{M^2} \right)^4$$

kann man auch

$$\gamma = \frac{C\phi}{M^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

an Stelle von  $\alpha$  nehmen. Es ist dann zufolge (3)

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{M^2}{C\phi} = \frac{C\phi - DU}{C\phi} = 1 - \frac{DU}{C\phi} = 1 - \frac{1}{\delta},$$

sodass also auch

$$\delta = \frac{C\phi}{DU} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

an die Stelle von  $\alpha$  oder  $\gamma$  treten kann.

### § 3.

Wir denken uns die Ebene  $v'$  durch drei Punkte  $y$ ,  $z$  und  $t$  gegeben.  $v'$  schneidet die Fläche  $F$  nach einem Kegelschnitt  $f$ . Der Punkt  $t$  liege nicht auf diesem Kegelschnitte  $f$  und die Polare von  $t$  bezüglich  $f$  schneide  $f$  in den beiden Punkten  $y$  und  $z$ . Dann gilt also

$$\left. \begin{aligned} (a'y)^2 &= 0, & (a'z)^2 &= 0 \\ (a'y)(a't) &= 0, & (a'z)(a't) &= 0, & (a'y)(a'z) &= R \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

Der Pol von  $v'$  bezüglich  $F$  sei der Punkt  $s$ . Es ist also

$$(u' s) = (u' a) (a v') = (u' a' b' c') (v' a' b' c')$$

und

$$(v' s) = (v' a' b' c') (v' a' b' c') = 6\phi \dots \dots \dots (8)$$

Ueberdies ist

$$(a' s) (a' y) = (a' s) (a' z) = (a' s) (a' t) = 0 \dots \dots \dots (9)$$

Aus diesen Festsetzungen folgen Gleichungen, die wir im Folgenden benötigen.

Drücken wir in  $6\phi = (a' b' c' v')^2$  die  $v'_i$  durch  $(yzt)_{jkl}$  aus, so wird

$$6\phi = \begin{vmatrix} (a' y) & (a' z) & (a' t) \\ (b' y) & (b' z) & (b' t) \\ (c' y) & (c' z) & (c' t) \end{vmatrix}^2 = 6(a' y)(b' z)(c' t) \cdot \begin{vmatrix} (a' y) & (a' z) & (a' t) \\ (b' y) & (b' z) & (b' t) \\ (c' y) & (c' z) & (c' t) \end{vmatrix}$$

also, nach Entwicklung der Determinante, wegen (7):

$$(a' t)^2 = - \frac{\phi}{R^2} \dots \dots \dots (10)$$

Mit Hilfe der Gleichung

$$(d' a) (u' a) (d' x) = (a' b' c' d') (a' b' c' u') (d' x) = 6D \cdot (u' x)$$

erhält man für  $(a' s)^2$ :

$$(a' s)^2 = (a' a) (a v') (a' b) (b v') = (a' c' d' e') (v' c' d' e') (a' b) (b v') = 6D \cdot (b v')^2,$$

also:

$$(a' s)^2 = 36 D \phi \dots \dots \dots (11)$$

Schliesslich setzen wir auch in  $2U = (a' b' l' v')^2$  für die  $v'_i$  die dreireihigen Determinanten  $(yzt)_{jkl}$  und erhalten

$$2U = \begin{vmatrix} (a' y) & (a' z) & (a' t) \\ (b' y) & (b' z) & (b' t) \\ (l' y) & (l' z) & (l' t) \end{vmatrix}^2.$$

Entwickeln wir dies, so ergibt sich wegen (7) und (10):

$$U = \frac{2\phi}{R} (l' y) (l' z) - R^2 (l' t)^2 \dots \dots \dots (12)$$

## § 4.

Wir berechnen jetzt den Inhalt  $V$  des Kegels mit der Basis  $f$  in  $v'$  und der Spitze  $s = \text{Pol der Ebene } v'$ . Hierzu wollen wir annehmen, dass  $F$  ein reelles Ellipsoid oder ein reelles zweischaliges Hyperboloid ist, das von  $v'$  in einer reellen Ellipse geschnitten wird. Für diesen Fall haben wir

$$D < 0, C > 0, \phi < 0, U > 0. \quad (13)$$

Einen Punkt  $P$  der Ebene  $v'$  halten wir dann durch zwei Parameter  $\varrho$  und  $\sigma$  fest

$$P(\varrho, \sigma) = P = \varrho y + \sigma z + t. \quad (14)$$

$P$  liegt auf  $F$ , also auf dem Kegelschnitte  $f$ , für

$$2\varrho\sigma(a'y)(a'z) + (a't)^2 = 0,$$

also nach (10) für

$$\varrho\sigma = \frac{\Phi}{2R^3}, \quad (15)$$

d.h.  $P$  auf  $f$  hat die Gestalt

$$P = P(\varrho) = \varrho \cdot y + \frac{\Phi}{2R^3\varrho} \cdot z + t. \quad (15a)$$

Wir nehmen dann als Volumsdifferential  $dV$  die Pyramide mit Spitze  $s$  und mit dem Dreieck

$$y, P(\varrho), P' = P(\varrho + d\varrho)$$

als Basis. Es ist dann

$$dV = \frac{1}{6} \frac{(yPP's)}{(l'y)(l's)(l'P)^2},$$

also wird wegen

$$(yPP's) = (yzt s) \cdot \frac{\Phi}{2R^3\varrho^2} \cdot d\varrho = \frac{3\Phi^2}{R^3} \frac{d\varrho}{\varrho^2} \text{ und } (l's) = 6M:$$

$$V = \frac{1}{12} \frac{\Phi^2}{MR^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho}{\left[ \varrho^2(l'y) + \varrho(l't) + \frac{\Phi(l'z)}{2R^3} \right]^2}$$

Der Nenner des Integranden wird hier nach (12)

$$\begin{aligned} (l'y)^2 \left[ \left( \varrho + \frac{(l't)}{2(l'y)} \right)^2 + \frac{\Phi(l'z)}{2R^3(l'y)} - \frac{(l't)^2}{4(l'y)^2} \right]^2 = \\ = (l'y)^2 \left[ \left( \varrho + \frac{(l't)}{2(l'y)} \right)^2 + \frac{U}{4R^2(l'y)^2} \right]^2 = \frac{U^2}{16R^4(l'y)^2} \left[ \left( \frac{\varrho + \frac{(l't)}{2(l'y)}}{\sqrt{U}} \right)^2 + 1 \right]^2 \end{aligned}$$



Setzen wir also

$$\tau = \frac{2 R(l' y) \varrho + R(l' t)}{\sqrt{U}}, \quad d\varrho = \frac{\sqrt{U}}{2 R(l' y)} d\tau,$$

so geht  $V$  über in

$$V = \frac{2}{3} \frac{\Phi^2}{M U^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(\tau^2 + 1)^2}.$$

Da hier das Integral der Wert  $\frac{1}{2}\pi$  hat, wird also

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\Phi^2}{M U^{3/2}} \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad (16)$$

Nehmen wir statt des Punktes  $s$  den Mittelpunkt  $m = a(a')$  der Fläche  $F$ , so erhalten wir auf dieselbe Art für den Inhalt  $W$  des Kegels über  $f$  mit der Spitze  $m$ :

$$W = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\Phi M}{C U^{3/2}} \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad (17)$$

Durch die absoluten Invarianten des § 2 ausgedrückt haben wir nach (4) und (5):

$$V = \frac{\pi}{3} \sqrt{\beta} \quad , \quad W = \frac{V}{\gamma'} = \frac{\sqrt{\beta}}{\gamma'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

## § 5.

Wir machen bei einem reellen Ellipsoid  $F$  wieder die Annahme (13) und berechnen den Inhalt der beiden Teile  $T_1$  und  $T_2$ , in die die Ebene  $v'$  das Ellipsoid zerschneidet.

Zu diesem Zwecke gehen wir wieder wie im § 3 aus von dem Tetraeder  $y, z, t, s$  und suchen eine Parameterdarstellung der Punkte  $P$  auf der Fläche  $F$ . Sind  $X_1 : X_2 : X_3 : X_4$  die Koordinaten von  $P$  bezüglich des genannten Tetraeders, also

$$P = X_1 y + X_2 z + X_3 t + X_4 s,$$

so legen wir eine durch den Punkt  $y$  gehende Gerade fest durch die beiden Ebenen

$$X_2 = \lambda X_4 \quad \text{und} \quad X_3 = \mu X_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Wenn  $P$  auf  $F$  liegen soll, wird nach (7), (9), (10) und (11):

$$2 X_1 X_2 R - X_3^2 \frac{\Phi}{R^2} + X_4^2 \cdot 36 D \Phi = 0.$$

Aus dieser Gleichung und aus (19) lassen sich die Verhältnisse der  $X_i$  für den Punkt  $P$  berechnen und wir erhalten

$$P = y \cdot \frac{\mu^2 \Phi - 36 D \Phi R^2}{2 R^3} + z \cdot \lambda^2 + t \cdot \lambda \mu + s \cdot \lambda = P(\lambda, \mu) \quad (20)$$

Wir setzen dann

$$P' = P(\lambda + d\lambda, \mu) \quad , \quad P'' = P(\lambda, \mu + d\mu) \quad , \quad P''' = P(\lambda + d\lambda, \mu + d\mu)$$

und erhalten als Elementarvolumen  $dT$  die Summe der Pyramiden mit der Spitze  $y$  und den Dreiecken  $PP'P''$  bzw.  $P'P'''P''$  als Basis:

$$dT = \frac{1}{6} \cdot \frac{(y PP'P'')}{(l'y)(l'P)^3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{(y P'P'''P'')}{(l'y)(l'P)^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(y PP'P'')}{(l'y)(l'P)^3}.$$

Ausgeführt gibt dies nach (20)

$$dT = 2\Phi \cdot \frac{\lambda^3 d\lambda d\mu}{(l'y)(l'P)^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Für die beiden Teile  $T_1$  und  $T_2$  erhalten wir also

$$\begin{aligned} T_1 &= 2 \frac{\Phi}{(l'y)} \int_0^{\infty} \lambda^3 d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{(l'P)^3} \\ T_2 &= 2 \frac{\Phi}{(l'y)} \int_0^{-\infty} \lambda^3 d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{(l'P)^3} \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Bei einem Hyperboloid gibt  $T_1$  die Kalotte, die von einer der Schalen abgeschnitten wird. Analog bei einem elliptischen Paraboloid.

Wir berechnen zuerst das innere Integral in  $T_1$ . Nach (20) ist

$$\begin{aligned} J_{\mu} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \mu^2 \frac{\Phi}{2R^3} (l'y) + \mu \lambda (l't) + \left( \lambda^2 (l'z) + \lambda (l's) - \frac{18 D \Phi (l'y)}{R} \right) \right]^3 d\mu \\ &= \frac{8 R^9}{\Phi^3 (l'y)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{N^3} \end{aligned}$$

wobei wegen  $(l's) = 6M$  der Nenner

$$\begin{aligned} N &= \mu^2 + \mu \cdot \frac{2\lambda R^3 (l't)}{\Phi (l'y)} + \frac{2R^3}{\Phi (l'y)} \cdot \left\{ \lambda^2 (l'z) + \lambda \cdot 6M - \frac{18 D \Phi (l'y)}{R} \right\} = \\ &= \left( \mu + \frac{\lambda R^3 (l't)}{\Phi (l'y)} \right)^2 + \lambda^2 \left( \frac{2R^3}{\Phi (l'y)} (l'z) - \frac{R^6 (l't)^2}{\Phi^2 (l'y)^2} \right) + \lambda \cdot \frac{12MR^3}{\Phi (l'y)} - 36 R^2 D, \end{aligned}$$

also, nach (12):

$$N = \left( \mu + \frac{\lambda R^3 (l' t)}{\phi(l' y)} \right)^2 + \lambda^2 \cdot \frac{R^4 U}{\phi^2(l' y)^2} + \lambda \cdot \frac{12 M R^3}{\phi(l' y)} - 36 R^2 D =$$

$$= \left( \mu + \frac{\lambda R^3 (l' t)}{\phi(l' y)} \right)^2 + \Delta(\lambda).$$

Hier wird die Diskriminante der in  $\lambda$  quadratischen Form  $\Delta(\lambda)$  nach (3) gleich

$$\frac{36 M^2 R^6}{\phi^2(l' y)^2} + \frac{36 R^6 D U}{\phi^2(l' y)^2} = \frac{36 R^6}{\phi^2(l' y)^2} (M^2 + D U) = \frac{36 C R^6}{\phi(l' y)^2} < 0.$$

Also ist, da  $\Delta(0) > 0$ , die Form  $\Delta(\lambda)$  positiv-definit. Somit können wir setzen

$$N = \Delta(\lambda) \left\{ \left( \mu + \frac{\lambda R^3 (l' t)}{\sqrt{\Delta(\lambda)} \phi(l' y)} \right)^2 + 1 \right\} = \Delta(\lambda) \cdot (\nu^2 + 1)$$

mit

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\Delta(\lambda)}} \left( \mu + \frac{\lambda R^3 (l' t)}{\phi(l' y)} \right), \quad d\mu = \sqrt{\Delta(\lambda)} \cdot d\nu.$$

Das Integral  $J_\mu$  wird also

$$J_\mu = \frac{8 R^9}{\phi^3(l' y)^3 [\Delta(\lambda)]^{5/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{(\nu^2 + 1)^3} = \frac{3\pi R^9}{\phi^3(l' y)^3 [\Delta(\lambda)]^{5/2}}.$$

Damit wird

$$T_1 = \frac{6\pi R^9}{\phi^2(l' y)^4} \int_0^\infty \left[ \lambda^2 \frac{R^4 U}{\phi^2(l' y)^2} + \lambda \frac{12 M R^3}{\phi(l' y)} - 36 R^2 D \right]^{5/2} \cdot d\lambda. \quad (23)$$

Hier wird der Klammerausdruck des Nenners

$$\frac{R^4 U}{\phi^2(l' y)^2} \left\{ \left( \lambda + \frac{6 M \phi(l' y)}{R U} \right)^2 - 36 \frac{\phi^2(l' y)^2}{R^2 U^2} (M^2 + D U) \right\},$$

also nach (3) und wegen  $C \phi < 0$ :

$$= \frac{R^4 U}{\phi^2(l' y)^2} \left\{ \left( \lambda + 6 \frac{M \phi(l' y)}{R U} \right)^2 + 36 \frac{\phi^2(l' y)^2 (-C \phi)}{R^2 U^2} \right\} =$$

$$= 36 \frac{R^2 (-C \phi)}{U} \left\{ \left( \frac{\lambda \cdot R U + 6 M \phi(l' y)}{6 \phi(l' y) \sqrt{-C \phi}} \right)^2 + 1 \right\}.$$

12\*

Setzen wir also

$$\tau = \frac{\lambda \cdot RU + 6M\phi(l'y)}{6\phi(l'y)\sqrt{-C\phi}}, \quad \lambda = \frac{6\phi(l'y)}{RU}(\tau \cdot \sqrt{-C\phi} - M)$$

$$d\lambda = \frac{6\phi(l'y)\sqrt{-C\phi}}{RU} d\tau, \quad \tau_0 = \frac{M}{\sqrt{-C\phi}},$$

so geht (23) über in

$$T_1 = \frac{\pi}{C^2 U^{3/2}} \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{(\tau \cdot \sqrt{-C\phi} - M)^3}{(\tau^2 + 1)^{5/2}} d\tau,$$

d.h.

$$T_1 = \frac{\pi}{C^2 U^{3/2}} \left\{ -C\phi \sqrt{-C\phi} \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\tau^3 d\tau}{(\tau^2 + 1)^{5/2}} + 3MC\phi \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\tau^2 d\tau}{(\tau^2 + 1)^{5/2}} + \right. \\ \left. + 3M^2 \sqrt{-C\phi} \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\tau d\tau}{(\tau^2 + 1)^{5/2}} - M^3 \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau^2 + 1)^{5/2}} \right\} \quad (24)$$

Nennen wir die hier auftretenden Integrale von links nach rechts  $J_3, J_2, J_1$  und  $J_0$ , dann ist für

$$\tau = \tan \varphi, \quad \tan \varphi_0 = \frac{M}{\sqrt{-C\phi}},$$

also

$$\cos \varphi_0 = \sqrt{\frac{C\phi}{DU}}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{M}{\sqrt{-DU}};$$

$$J_3 = \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi = \left[ -\frac{1}{3} \cos \varphi \sin^2 \varphi - \frac{2}{3} \cos \varphi \right]_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{M^2}{DU} \sqrt{\frac{C\phi}{DU}} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{C\phi}{DU}}$$

$$J_2 = \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \left[ \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{M^3}{DU \sqrt{-DU}}$$

$$J_1 = \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right]_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} = +\frac{1}{3} \frac{C\phi}{DU} \sqrt{\frac{C\phi}{DU}}$$



$$\begin{aligned}
 J_0 &= \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \, d\varphi = \left[ \frac{1}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi + \frac{2}{3} \sin \varphi \right]_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \frac{C \phi M}{DU \sqrt{-DU}} - \frac{2}{3} \frac{M}{\sqrt{-DU}}.
 \end{aligned}$$

Setzt man dies in (24) ein, so kommt schliesslich:

$$T_1 = \pi \left[ \frac{2}{3} \sqrt{-\frac{D^3}{C^4}} + \frac{M \phi}{C U^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{3} \frac{M^3}{C^2 U^{\frac{3}{2}}} \right] \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

und analog

$$T_2 = \pi \left[ \frac{2}{3} \sqrt{-\frac{D^3}{C^4}} - \frac{M \phi}{C U^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{3} \frac{M^3}{C^2 U^{\frac{3}{2}}} \right] \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Es ist also

$$T_1 + T_2 = \frac{4}{3} \pi \sqrt{-\frac{D^3}{C^4}}$$

das Volumen des Ellipsoides.

Die in (25) stehenden absoluten Invarianten können durch die im § 2 genannten wie folgt ausgedrückt werden:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{D^3}{C^4} &= \frac{\beta \gamma}{\delta^3} = \frac{\gamma^2 (\gamma - 1)^3}{\alpha} \\
 \frac{M \phi}{C U^{\frac{3}{2}}} &= \frac{\sqrt{\beta}}{\gamma} = \frac{3}{\pi} W \\
 \frac{M^3}{C^2 U^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\beta}}{\gamma^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{Vgl. Gleichung (17)}).$$

Die Formeln (25) und (26) gelten auch noch für  $\phi = 0$ , d.h. für den Fall, dass die Ebene  $v'$  das Ellipsoid berührt. Es ist dann  $M^2 = -DU$  und  $T_1$  wird Null, während  $T_2$  das Volumen des ganzen Ellipsoides gibt.

## § 6.

Bei einem reellen elliptischen Paraboloid, das von der Ebene  $v'$  nach einem reellen Kegelschnitte  $f$  geschnitten wird, haben wir analog zu (13)

$$D < 0 \quad , \quad C = 0 \quad , \quad \phi < 0 \quad , \quad U > 0. \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Für das Volumen  $V$  des Tangentenkegels über  $f$  erhalten wir genau so wie im § 4 die Formel

$$V = \frac{\pi}{3} \frac{\phi^2}{M U^{\frac{3}{2}}}.$$

Und für die durch  $v'$  vom Paraboloid abgeschnittene Kalotte ergibt sich so wie bei (22)

$$T_1 = \frac{8R^3}{\phi^2(l'y)^4} \int_0^\infty \lambda^3 d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{\left[ \left( \mu + \frac{\lambda R^3 l' t}{\phi(l'y)} \right)^2 + \Delta(\lambda) \right]^3} \quad (28)$$

wobei jetzt die Diskriminante von  $\Delta(\lambda)$  wegen  $C=0$  Null ist. Für alle  $\lambda$  ist  $\Delta(\lambda) \geq 0$ . Ist  $\Delta(\lambda) > 0$ , so verläuft die Rechnung, die zu (23) führt, genau so wie beim Ellipsoid und wegen

$$M^2 = -DU$$

ist jetzt

$$\Delta(\lambda) = \left( \lambda \frac{R^3 M}{\phi(l'y)\sqrt{-D}} + 6R\sqrt{-D} \right)^2$$

und (28) geht über in

$$T_1 = \frac{6\pi R^9}{\phi^2(l'y)^4} \int_0^\infty \frac{\lambda^3 d\lambda}{\left[ \lambda \frac{R^2 M}{\phi(l'y)\sqrt{-D}} + 6R\sqrt{-D} \right]^5} \quad (29)$$

Beim Ausnahmewert

$$\lambda_0 = \frac{6\phi(l'y)D}{MR},$$

für welchen  $\Delta(\lambda_0) = 0$  wird, geht das innere Integral von (28) über in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{\left( \mu + \lambda_0 \frac{R^3(l't)}{\phi(l'y)} \right)^6} = 0.$$

Es gilt also (29) für alle  $\lambda$  und wir haben

$$T_1 = \frac{6\pi\phi^3(l'y)}{RU^{5/2}} \int_{\tau_0}^\infty \frac{1}{\tau^5} \left( \tau - \frac{6M\phi(l'y)}{RU} \right)^3 d\tau$$

mit  $\tau_0 = \frac{6M\phi(l'y)}{RU}.$

Damit wird schliesslich

$$T_1 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\phi^2}{MU^{3/2}} = \frac{3}{4} V \quad (30)$$

der Inhalt der Kalotte beim elliptischen Paraboloid.

**Mathematics.** — *Beiträge zur Theorie der Systeme PFAFFscher Gleichungen. II. Beweis des Hauptsatzes für  $q = n - 5$ .* Von J. A. SCHOUTEN und W. VAN DER KULK.

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

*Vorbereitungen für den Beweis für ungerades  $n - q$ .*

Es gilt ein System von  $q$  unabhängigen Vektoren von der Form

$$\mu_1^1 \partial_\lambda p + \dots + \mu_u^u \partial_\lambda p; \quad 2u - 1 = p = n - q \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

zu finden, die den  $p$  Gleichungen

$$\mu_1^1 v_b^\lambda \partial_\lambda p + \dots + \mu_u^u v_b^\lambda \partial_\lambda p = 0; \quad b = 1, \dots, p \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

oder auch

$$\mu_1^1 X_b p + \dots + \mu_u^u X_b p = 0; \quad b = 1, \dots, p \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

genügen. Elimination von  $\mu_1 \dots \mu_u$  ergibt

$$\left\| \begin{array}{cccc} X_1^1 p & \dots & X_1^u p \\ \vdots & & \vdots \\ X_p^1 p & \dots & X_p^u p \end{array} \right\| = \text{Matrix vom Range} < u \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Durch lineare Transformation der  $v_b^\lambda$  in  $v_b^\lambda$ , ( $b = 1, \dots, p$ ) lässt sich immer erreichen, dass

$$X_b = \partial_b + v_b^{p+1} \partial_{p+1} + \dots + v_b^n \partial_n; \quad b = 1, \dots, p \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wird. Wir bemerken, dass jetzt alle Klammerausdrücke  $X_{ab}$  keine Differentiationen nach  $x^1, \dots, x^p$  mehr enthalten. Statt des schwer zu behandelnden Systems (4) betrachten wir das System

$$\left. \begin{array}{l} X_1^1 p = {}^2_\sigma X_2^1 p + \dots + {}^u_\sigma X_u^1 p \\ \vdots \\ X_1^u p = {}^2_\sigma X_2^u p + \dots + {}^u_\sigma X_u^u p \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

$$\theta_f = (X_f^1 p)(X_2^2 p) \dots (X_u^u p) = 0; \quad f = u + 1, \dots, p \quad . \quad . \quad (6b)$$

das jedoch nur dann mit (4) gleichwertig ist, wenn die Bedingung

$$(X_2 p)^{[i_2]} \dots (X_u p)^{[i_u]} \neq 0; i_2 \dots i_u = 1, 2, \dots, u \quad (6c)$$

erfüllt ist, d.h. wenn nicht *alle* Determinanten, die entstehen können durch einsetzen von  $u-1$  der Zahlen  $1, \dots, u$  für  $i_2 \dots i_u$  verschwinden.

Sind  $p, \dots, p$  Lösungen von (6a), so gilt für  $\theta_f$

$$X_1 \theta_f = X_2 (\overset{2}{\sigma} \theta_f) + \dots + X_u (\overset{u}{\sigma} \theta_f) + \zeta_f \quad (7)$$

wo

$$\zeta_f = \Psi_{1,f} - \overset{2}{\sigma} \Psi_{2,f} - \dots - \overset{u}{\sigma} \Psi_{u,f}; f = u+1, \dots, p \quad (8a)$$

und

$$\Psi_{if} = (X_{1f} p)^{[1]} (X_2 p)^{[2]} \dots (X_u p)^{[u]} + (X_f p)^{[1]} (X_{i_2} p)^{[2]} \dots (X_u p)^{[u]} + \dots + (X_f p)^{[1]} (X_2 p)^{[2]} \dots (X_{u-1} p)^{[u-1]} (X_u p)^{[u]}; i = 1, \dots, u \quad (8b)$$

ist. Sollen nun  $p, \dots, p$  auch Lösungen von (6b) sein, so müssen sie die Ausdrücke  $\theta_f$ , ( $f = u+1, \dots, p$ ) Null machen, und es müssen also jedenfalls die  $\zeta_f$  verschwinden. Die  $p-u = u-1$  Gleichungen  $\zeta_f = 0$  können also dazu benutzt werden die  $\sigma$  aus den Gleichungen (6a) fortzuschaffen, vorausgesetzt, dass die  $(u-1)$ -reihige Determinante

$$\begin{vmatrix} \Psi_{2,u+1} & \dots & \Psi_{u,u+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Psi_{2,p} & \dots & \Psi_{u,p} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (9)$$

ist. Es entstehen dann aus (6a) Gleichungen von der Form

$$\left. \begin{aligned} \partial_1 p &= \overset{2}{\sigma} X_2 p + \dots + \overset{u}{\sigma} X_u p - \overset{1}{v^{p+1}} \partial_{p+1} p - \dots - \overset{1}{v^n} \partial_n p \\ &\vdots \\ \partial_1 p &= \overset{u}{\sigma} X_2 p + \dots + \overset{u}{\sigma} X_u p - \overset{u}{v^{p+1}} \partial_{p+1} p - \dots - \overset{u}{v^n} \partial_n p \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

wo  $\overset{2}{\sigma} \dots \overset{u}{\sigma}$  jetzt bekannte Funktionen der  $x^1, \dots, x^n$  und der  $\partial_\beta p$ , ( $i = 1, \dots, u$ ;  $\beta = 2, \dots, n$ ) sind, mit der Nebenbedingung (9). Die rechten Seiten von (10) enthalten keine Differentiationen nach  $x^1$  und alle Differentiationen sind von der ersten Ordnung. Sind die Koeffizienten also regulär in der Umgebung von  $x^\alpha = x_0^\alpha$ , so gibt es (vorläufig



abgesehen von den Nebenbedingungen (6c) und (9)) nach CAUCHY—KOWALEWSKI ein einziges Lösungssystem von (10), das für  $x^1 = x_0^1$  übergeht in die beliebigen Funktionen der  $x^2, \dots, x^n$

$$\left. \begin{array}{l} p_0^1(x^1, x^2, \dots, x^n) = p_0^1(x^2, \dots, x^n) \\ \vdots \\ p_0^u(x^1, x^2, \dots, x^n) = p_0^u(x^2, \dots, x^n) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Wir müssen nun aber diese Funktionen so wählen, dass die Nebenbedingungen (6c) und (9) für  $x^1 = x_0^1$  erfüllt sind, also

$$(X_2 p_0^{i_2}) \dots (X_u p_0^{i_u}) \neq 0; i_2, \dots, i_u = 1, \dots, u \dots \dots (12)$$

$$\left| \begin{array}{cccc} (\Psi_{2,u+1})_0 & \dots & \dots & (\Psi_{u,u+1})_0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ (\Psi_{2,p})_0 & \dots & \dots & (\Psi_{u,p})_0 \end{array} \right| \neq 0; ( )_0 = \text{Wert von } ( ) \text{ für } x^1 = x_0^1. \quad (13)$$

Wäre (13) nicht erfüllt, so liessen sich  $\sigma^2, \dots, \sigma^u$  schon für  $x^1 = x_0^1$  nicht aus  $\zeta_f = 0$  lösen. Ausserdem soll das Lösungssystem von (10) so gewählt werden, dass es auch die  $\theta_f^1$  Null macht, und wir verlangen also, dass die  $\theta_f^1$  jedenfalls schon für  $x^1 = x_0^1$  verschwinden

$$(X_f p_0^1) (X_2 p_0^2) \dots (X_u p_0^u) = 0; f = u+1, \dots, p \dots \dots (14)$$

Sind (12), (13) und (14) erfüllt, so existiert nach CAUCHY—KOWALEWSKI ein einziges Lösungssystem von (10), das auch (6c), (9) und (11) erfüllt. Es ist zu beachten, dass weder in (6c) noch in (9) Differentiationen nach  $x^1$  vorkommen, sodass tatsächlich (12) und (13) Bedingungen für die Funktionen  $p_0^1, \dots, p_0^u$  darstellen, die  $p^1, \dots, p^u$  nicht mehr enthalten.

Nehmen wir jetzt einen Augenblick an, es gelänge  $p_0^1, \dots, p_0^u$  den Bedingungen (12), (13) und (14) entsprechend zu wählen, so würden für die aus  $p_0^1, \dots, p_0^u$  hervorgehenden Lösungen  $p^1, \dots, p^u$  die Ausdrücke  $\theta_f^1$  den Gleichungen

$$X_1 \theta_f^1 = X_2(\sigma^2 \theta_f^1) + \dots + X_u(\sigma^u \theta_f^1) \dots \dots \dots (15a)$$

oder ausgeschrieben

$$\partial_I \theta_f = X_2 \binom{2}{\sigma} \theta_f + \dots + X_u \binom{u}{\sigma} \theta_f - v \binom{p+1}{1} \partial_{p+1} \theta_f - \dots - v^n \partial_n \theta_f \quad (15b)$$

genügen, in welchen Gleichungen  $\binom{2}{\sigma}, \dots, \binom{u}{\sigma}$  jetzt, nach Bildung des Lösungssystems  $\binom{1}{p}, \dots, \binom{u}{p}$ , bekannte Funktionen von  $x^1, \dots, x^n$  wären. Nun genügen aber die  $\theta_f$  infolge (14) jedenfalls den Gleichungen

$$\theta_f(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0. \quad (16)$$

Da es nun aber einerseits nach CAUCHY—KOWALEWSKI nur ein einziges System von Lösungen von (15b) gibt, die für  $x^1 = \binom{1}{0}$  Null werden, andererseits aber  $\theta_f = 0$  offenbar ein solches Lösungssystem ist, so ist dieses System auch das einzige, und daraus folgt, dass die konstruierte Lösung  $\binom{1}{p}, \dots, \binom{u}{p}$  von (6a) auch (6b) befriedigt.

Es bleibt also jetzt nur noch zu zeigen, dass es tatsächlich Funktionensysteme  $\binom{1}{p}, \dots, \binom{u}{p}$  von  $x^2, \dots, x^n$  gibt, die gleichzeitig (12), (13) und (14) befriedigen und die Anzahl der möglichen unabhängigen Funktionensysteme zu bestimmen. Wir führen dies hier aus für  $q = n - 5$ .

*Beweis für  $q = n - 5$ .*

Für  $q = n - 5$  ist  $u = 3$  und es gehen (12), (13) und (14) über in

$$\begin{vmatrix} X_2 \binom{1}{p}_0 & X_2 \binom{2}{p}_0 & X_2 \binom{3}{p}_0 \\ X_3 \binom{1}{p}_0 & X_3 \binom{2}{p}_0 & X_3 \binom{3}{p}_0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (17)$$

$$\begin{vmatrix} \left\{ (X_{24} \binom{1}{p}_0 (X_2 \binom{2}{p}_0 (X_3 \binom{3}{p}_0) + \right. \right. & \left. \left. (X_{34} \binom{1}{p}_0 (X_2 \binom{2}{p}_0 (X_3 \binom{3}{p}_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + (X_4 \binom{1}{p}_0 (X_2 \binom{2}{p}_0 (X_{23} \binom{3}{p}_0) \right)_0 \right\} & \left. \left. + (X_4 \binom{1}{p}_0 (X_{32} \binom{2}{p}_0 (X_3 \binom{3}{p}_0) \right)_0 \right\} \\ \left\{ (X_{25} \binom{1}{p}_0 (X_2 \binom{2}{p}_0 (X_3 \binom{3}{p}_0) + \right. & \left\{ (X_{35} \binom{1}{p}_0 (X_2 \binom{2}{p}_0 (X_3 \binom{3}{p}_0) + \right. \\ \left. \left. + (X_5 \binom{1}{p}_0 (X_2 \binom{2}{p}_0 (X_{23} \binom{3}{p}_0) \right)_0 \right\} & \left. \left. + (X_5 \binom{1}{p}_0 (X_{32} \binom{2}{p}_0 (X_3 \binom{3}{p}_0) \right)_0 \right\} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (18)$$

und

$$\begin{cases} (X_4 \binom{1}{p}_0 (X_2 \binom{2}{p}_0 (X_3 \binom{3}{p}_0) = 0 \\ (X_5 \binom{1}{p}_0 (X_2 \binom{2}{p}_0 (X_3 \binom{3}{p}_0) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Nach dem für  $q = n - 4$  bewiesenen Satz <sup>1)</sup> gibt es nun Funktionen  $\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \overset{3}{p}$  die den Gleichungen (19) genügen, so dass  $\partial_{\beta} \overset{1}{p} = \overset{1}{P}_{\beta}$ ,  $\partial_{\beta} \overset{2}{p} = \overset{2}{P}_{\beta}$ ,  $\partial_{\beta} \overset{3}{p} = \overset{3}{P}_{\beta}$ , ( $\beta = 2, \dots, n$ ) in  $x^{\alpha} = x^{\alpha}_0$ , wo  $\overset{1}{P}_{\beta}, \overset{2}{P}_{\beta}, \overset{3}{P}_{\beta}$  Vektoren sind, die folgenden Bedingungen gemäss gewählt sind (vgl. I, 58—61) (wir formulieren die Bedingungen hier für den einfachen Trivektor  $P_{\alpha\beta\gamma} = \overset{1}{P}_{[\alpha} \overset{2}{P}_{\beta} \overset{3}{P}_{\gamma]}$ )

$$P_{a,b,c} = 0; P_{a,b,c} = v^{\alpha} v^{\beta} v^{\gamma} P_{\alpha\beta\gamma} \quad (\text{vgl. I, 58}) \quad (20)$$

$$v^{[\gamma} v^{\beta]} P_{\gamma\beta} \neq 0 \quad (\text{vgl. I, 59}) \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{2,3,45} + P_{3,4,25} + P_{4,2,35} + P_{2,5,34} + P_{3,5,42} + \\ + P_{4,5,23} = 0; P_{a,b,c} = v^{\alpha} v^{\beta} v^{\gamma} P_{\alpha\beta\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (\text{vgl. I, 60}) \quad (22)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} v^{\alpha} \overset{1}{P}_{\alpha} & v^{\alpha} \overset{2}{P}_{\alpha} & v^{\alpha} \overset{3}{P}_{\alpha} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v^{\alpha} \overset{1}{P}_{\alpha} & v^{\alpha} \overset{2}{P}_{\alpha} & v^{\alpha} \overset{3}{P}_{\alpha} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v^{\alpha} \overset{1}{P}_{\alpha} & v^{\alpha} \overset{2}{P}_{\alpha} & v^{\alpha} \overset{3}{P}_{\alpha} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v^{\alpha} \overset{1}{P}_{\alpha} & v^{\alpha} \overset{2}{P}_{\alpha} & v^{\alpha} \overset{3}{P}_{\alpha} \end{array} \right| = \text{Matrix vom Range 3 (vgl. I, 61)} \quad (23)$$

Es ist also nur noch zu untersuchen ob  $P_{\alpha\beta\gamma}$  so gewählt werden kann, dass ausserdem noch

$$\left| \begin{array}{cc} P_{2,3,24} + P_{4,2,23} & P_{2,3,34} + P_{3,4,32} \\ P_{2,3,25} + P_{5,2,23} & P_{2,3,35} + P_{3,5,32} \end{array} \right| \neq 0 \quad (24)$$

ist. Denn dann gilt für  $\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \overset{3}{p}$  die Gleichung (18). Schreiben wir

$$P_{\alpha\beta\gamma} = 3 Q_{[\alpha} P_{\beta\gamma]}, \dots \quad (25)$$

<sup>1)</sup> J. A. SCHOUTEN und W. VAN DER KULK, Beiträge zur Theorie der Systeme PFAFFscher Gleichungen I, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **43**, 18 (1940), hier zitiert als I.

wo  $P_{\beta\gamma}$  ein einfacher Bivektor ist, und wählen wir

$$\left. \begin{aligned} Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = 0, \quad Q_{23} = 1; \quad P_{2,3} = 1; \\ Q_{\alpha\beta} = v^\alpha_{\beta} Q_\alpha, \quad Q_{\alpha\beta} = v^\alpha_{\alpha\beta} Q_\alpha; \quad P_{\alpha\beta} = v^\alpha_{\alpha} v^\beta_{\beta} P_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

so ist  $P_{2,3,23} = 1$  und (20), (21) und (23) sind erfüllt. (22) geht über in

$$P_{2,3} Q_{45} + P_{3,4} Q_{25} + P_{4,2} Q_{35} + P_{2,5} Q_{34} + P_{3,5} Q_{42} + P_{4,5} Q_{23} = 0. \quad (27)$$

und (24) in

$$\left. \begin{aligned} (P_{2,3} Q_{24} + P_{4,2} Q_{23}) (P_{2,3} Q_{35} + P_{3,5} Q_{32}) - \\ - (P_{2,3} Q_{25} + P_{5,2} Q_{23}) (P_{2,3} Q_{34} + P_{3,4} Q_{32}) \neq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (28)$$

welche Ungleichung auf Grund von (27) und unter Berücksichtigung des Umstandes, dass  $P_{\beta\gamma}$  ein einfacher Bivektor ist, übergeht in

$$Q_{[24} Q_{35]} \neq 0. \quad (29)$$

Die Bedingungen (26) und (29) können immer erfüllt werden, auch wenn zwischen den  $v^\alpha_{\alpha\beta}$  lineare Beziehungen bestehen sollten, es sei denn dass

$$v^\alpha_{[24} v^\beta_{35]} = 0 \quad (30)$$

wäre. In dem Falle gibt es keinen Vektor  $Q_3$  der (26) und (29) genügt. Im anderen Falle gibt es aber stets unendlich viele solcher Vektoren, darunter sicher  $n-5$  linear unabhängige.

Der Gleichung (27) kann nach Wahl von  $Q_5$  immer genügt werden durch geeignete Wahl der  $P_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta \neq 2, 3$  oder  $3, 2$ . Gilt (30) nur für  $x^1 = x^1_0$  aber nicht für andere Werte von  $x^1$ , so kann man die Schwierigkeit durch andere Wahl von  $x^1_0$  beheben. Da man nun ausserdem die  $X_1, \dots, X_5$  beliebig numerieren darf, folgt, dass der Beweis nur dann stockt wenn

$$v^\alpha_{[\alpha\beta} v^\lambda_{\gamma\delta]} = 0; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (31)$$

ist. Nun ist diese Bedingung noch der speziellen Wahl der  $X_0$  angepasst und inolgedessen noch nicht invariant. Um die invariante Bedingung zu erhalten verwenden wir eine andere Schreibweise, die sich enger an die Theorie der anholonomen Koordinatensysteme anschliesst und sich auch für weitere Untersuchungen als nützlich erweisen wird. Bekanntlich lässt sich ein anholonomes Bezugssystem in einer  $X_n$  mit den holonomen Koordinaten  $x^\alpha$  festlegen durch die intermediären Bestimmungszahlen  $A^\alpha_{\lambda}$ , ( $\alpha = 1 \dots n$ ;  $\lambda = 1 \dots n$ ) des Einheitsaffinors  $A^\alpha_{\lambda}$ , die den Uebergang  $v^\alpha = A^\alpha_{\lambda} v^\lambda$  zwischen den zwei Arten von Bestimmungszahlen ermöglichen. Ist in



jedem Punkte eine  $p$ -Richtung und eine  $q$ -Richtung gegeben, die keine Richtung gemeinschaftlich haben, so kann man die anholonomen Massvektoren so legen, dass  $\underset{1}{e^x}, \dots, \underset{p}{e^x}$  gerade die  $p$ -Richtung und  $\underset{p+1}{e^x}, \dots, \underset{n}{e^x}$  gerade die  $q$ -Richtung aufspannen. Der Einheitsaffinor lässt sich dann folgendermassen zerlegen:

$$A_{\lambda}^x = B_{\lambda}^x + C_{\lambda}^x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

so dass

$$\left. \begin{aligned} B_b^x &= e_b^a e^x; \quad B_{\lambda}^a = e_{\lambda}^a e^x \\ C_y^x &= e_y^x e^x; \quad C_{\lambda}^x = e_{\lambda}^x e^x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &a, b = 1, \dots, p \\ &x, y = p+1, \dots, n \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

ist und diese beiden Zerlegungsstücke erzeugen die Komponenten der Grössen in der  $p$ - bzw.  $q$ -Richtung. Ist *nur* die  $p$ -Richtung gegeben so fallen  $B_{\lambda}^a$  und  $C_y^x$  fort und es bleiben nur  $B_b^x$  und  $C_{\lambda}^x$ . Die  $p$  Vektoren  $B_{(b)}^x$  spannen die  $p$ -Richtung auf und die  $q$  Vektoren  $C_{\lambda}^{(x)}$  enthalten dieselbe<sup>2)</sup>. Dies ist der Fall, den wir hier betrachten und es ist  $B_{(b)}^x = v_b^x$  und  $C_{\lambda}^{(x)} = w_{\lambda}^x$ .

Da

$$B_b^x C_{\mu}^x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

folgt für unsere spezielle Wahl der  $v^x$  dass

$$C_{ab}^x v^x = 2 C_{[a}^x v_{|b]}^x = 2 C_{[a}^x B_{(a)}^{\mu} \partial_{|\mu|} B_{(b)}^x] = -2 B_{(a)}^{\mu} B_{(b)}^x \partial_{\mu} C_{[a}^x \quad . \quad (35)$$

dieselbe Anzahl unabhängiger Bestimmungszahlen (nämlich  $q$ ) hat als  $v_{ab}^x$  und dass sich also (31) auch schreiben lässt

$$B_{[abc]d}^x \partial_{[x} C_{\lambda]}^x \partial_{\mu} C_{\nu]}^y = 0; \quad a, b, c, d = 1, \dots, 5, \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

welche Gleichung wir direkt für allgemeine Wahl der  $B_a^x$  und  $C_{\lambda}^x$  formuliert haben (lateinische Indizes), da sie ja die invariante Form hat. Da nun aber  $B_{ab}^x \partial_{[x} C_{\lambda]}^x$  nichts anderes ist als  $\partial_{[x} C_{\lambda]}^x \bmod. C_{\lambda, \dots, \lambda}^{p+1}, C_{\lambda}^n$ , folgt, dass die erhaltene Bedingung zum Ausdruck bringt, dass der Rang 2  $\varrho$  des Systems (nach ENGEL) gleich 2 ist. Es ist also nur noch der Fall zu erörtern eines Systems von  $n-5$  PFAFFschen Gleichungen für welches der Halbrang  $\varrho=1$  ist. Nun hat aber D. DEARBORN<sup>3)</sup>, gestützt auf

2) Vgl. für eine genaue Erörterung J. A. SCHOUTEN und E. R. VAN KAMPEN, Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nicht holonomer Gebilde.

3) D. DEARBORN, Inequalities among the invariants of PFAFFian systems, Duke Math. Journal, Vol. 2, Nr. 1, 705—711 (1936).

eine von M. GRIFFIN<sup>4)</sup> gegebene Normalform, bewiesen, dass jedes System von  $q$  PFAFFschen Gleichungen mit dem Halbrang 1 die Klasse  $\equiv q + 3$  hat, d.h., dass sich die  $q$  PFAFFschen Formen mit Hilfe von  $q + 3$  Variablen darstellen lassen. Für ein System von  $q$  Gleichungen in  $q + 3$  Variablen haben wir aber schon bewiesen, dass sich die Klasse der Gleichungen auf 3 reduzieren lässt, so dass der Ausnahmefall erledigt ist.

Für den allgemeinen Fall müssen wir jetzt noch zeigen, dass sich tatsächlich  $n - 5$  Lösungssysteme  $\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \overset{3}{p}$  herstellen lassen, so dass die korrespondierenden Vektoren  $\overset{1}{\mu} \overset{1}{p}_\lambda + \overset{2}{\mu} \overset{2}{p}_\lambda + \overset{3}{\mu} \overset{3}{p}_\lambda$  linear unabhängig sind.

Dazu kehren wir zurück zu dem Trivektor  $P_{\alpha\beta\gamma}$ , von dem wir jetzt wissen, dass er sich so bestimmen lässt, dass die Bedingungen (20–24) erfüllt sind. Nach dem für  $q = n - 4$  bewiesenen Haupttheorem gibt es jetzt zu jeder Wahl der Faktoren  $\overset{1}{P}_\beta, \overset{2}{P}_\beta, \overset{3}{P}_\beta$  drei Funktionen  $\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \overset{3}{p}$  der  $x^2, \dots, x^n$ , die den Gleichungen (19) genügen und deren Gradienten  $\overset{1}{p}_\beta, \overset{2}{p}_\beta, \overset{3}{p}_\beta$  in  $x^\alpha = x^\alpha_0$  übergehen in  $\overset{1}{P}_\beta, \overset{2}{P}_\beta, \overset{3}{P}_\beta$ .

Die Funktionen  $\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \overset{3}{p}$  erfüllen also jetzt die Gleichungen (12), (13) und (14) (für  $u = 3$  und  $p = 5$ ), oder auch (17), (18) und (19). Nach dem dort bewiesenen gibt es also drei Funktionen  $\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \overset{3}{p}$ , die den Gleichungen (6a), (6b) und (6c) genügen, und die für  $x^i = x^i_0$  übergehen in  $\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \overset{3}{p}$ . Im Punkte  $x^\alpha = x^\alpha_0$  gilt also

$$\partial_\beta \overset{1}{p} = \overset{1}{P}_\beta, \partial_\beta \overset{2}{p} = \overset{2}{P}_\beta, \partial_\beta \overset{3}{p} = \overset{3}{P}_\beta. \quad (37)$$

Uebrigens existieren drei Funktionen  $\overset{1}{\mu}, \overset{2}{\mu}, \overset{3}{\mu}$ , derart, dass

$$w_\lambda = \overset{1}{\mu} \overset{1}{p}_\lambda + \overset{2}{\mu} \overset{2}{p}_\lambda + \overset{3}{\mu} \overset{3}{p}_\lambda; \quad p_\lambda = \partial_\lambda p \quad (38)$$

ein Teiler des  $(n - 5)$ -Vektors  $w_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-5}}$  ist. In  $x^\alpha = x^\alpha_0$  ist  $w_\beta$  wegen (37) und (38) ein Teiler von  $P_{\alpha\beta\gamma}$ , für welchen

$$w_b = 0; \quad b = 2, \dots, 5 \quad (39)$$

gilt. Da auch  $Q_\beta$  ein solcher Teiler von  $P_{\alpha\beta\gamma}$  ist, kann man den freien skalaren Faktor in  $w_\lambda$  derart wählen, dass in  $x^\alpha = x^\alpha_0$

$$w_\beta = Q_\beta \quad (40)$$

<sup>4)</sup> M. GRIFFIN, Invariants of PFAFFian systems, Trans. Amer. Math. Soc. 35, 929–939 (1933).



*Ein Satz über bilineare Systeme von Differentialgleichungen.*

Nebenbei haben wir folgenden Satz erhalten.

*Das bilineare System von partiellen Differentialgleichungen in  $n$  Variablen*

$$\left\| \begin{array}{cc} X_1^1 p & X_1^2 p \\ \vdots & \vdots \\ X_p^1 p & X_p^2 p \end{array} \right\| = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47a)$$

oder auch

$$\mu_1 X_a^1 p + \mu_2 X_a^2 p = 0; \quad a = 1, \dots, p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47b)$$

besitzt dann und nur dann  $n-p$  Lösungssysteme  $p^1, p^2$ , deren zugehörige Vektoren  $\mu_1 \partial_{\lambda}^1 p + \mu_2 \partial_{\lambda}^2 p$  linear unabhängig sind, wenn der Ausdruck

$$B_{[a b c d]}^{\lambda \mu \lambda' \nu} (\partial_x C_\mu^x) (\partial_\lambda C_\nu^y); \quad x, y = p+1, \dots, n; \quad X_b = B_b^\mu \partial_\mu; \quad C_\mu^x B_a^\mu = 0 \quad (48)$$

verschwindet, d.h., wenn  $p \leq 3$  oder der Rang des adjungierten Systems PFAFFscher Gleichungen  $\leq 2$  ist.

In der Tat verschwindet der Ausdruck identisch für  $p \leq 3$  und in dem Falle existieren nach unserem Hauptsatz tatsächlich  $n-p$  linear unabhängige Lösungen. Ist aber  $p > 3$ , so ist  $q \leq 1$  und infolge des DEARBORNschen Satzes ist die Klasse des zugeordneten PFAFFschen Systems somit  $\leq q+3$ . Nach unserem Hauptsatz lassen sich die Gleichungen dieses Systems alle so wählen, dass ihre Klasse  $\leq 3$  ist und es ergeben sich somit ebenfalls  $n-p$  linear unabhängige Lösungen. Gibt es anderseits  $n-p$  linear unabhängige Lösungen, so lassen sich die  $C_\lambda^x$  so wählen, dass sie alle von der Klasse  $\leq 3$  sind. Die  $\partial_{[\mu} C_{\lambda]}^x$  haben dann alle den Rang  $\leq 2$  und es verschwindet somit der Ausdruck (48). Die Verallgemeinerung für multilineare Systeme liegt auf der Hand, ein allgemeiner Beweis scheint aber vorläufig noch nicht durchführbar.

**Chemistry.** — *Der Einfluss des Dispersitätsgrades auf physikalisch-chemische Konstanten.* (Achte Mitteilung). Von ERNST COHEN und J. J. A. BLEKKINGH Jr.

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

*Der Einfluss der Dispersität kristallisierter Stoffe auf das elektrische Leitvermögen ihrer gesättigten Lösungen. II.*

Nachdem wir in unserer 7. Mitteilung die Art und Weise beschrieben haben, in welcher es uns gelang chemisch und physikalisch reines  $\text{BaSO}_4$  darzustellen, wollen wir nunmehr die Ergebnisse unserer Messungen des Leitvermögens der (bei  $25.00^\circ \text{C.}$ ) gesättigten Lösungen dieses Sulfats näher erörtern.

D. DIE ERSTEN LEITFÄHIGKEITSVERSUCHE MIT DEN GESÄTTIGTEN LÖSUNGEN DES REINEN BARIUMSULFATS.

a. *Die gesättigte Lösung hat sich durch Diffusion gebildet.*

1. Unsere Tabelle 1 enthält die Werte des Leitvermögens (bei  $25.00^\circ \text{C.}$ ) der bei dieser Temperatur gesättigten Lösung.

Die Versuche beziehen sich auf den Fall, dass die Lösung sich durch Diffusion gebildet hat. Um dies zu erreichen, verfahren wir folgendermassen: Etwa 2 g des aus grösseren Stücken bestehenden, reinen Sulfats gaben wir in eine gründlich ausgedämpfte Flasche, und setzten dem Präparat in mehreren Etapen frisch destilliertes Wasser zu, d.h. Wasser für Leitfähigkeitsbestimmungen. Wir werden dasselbe im Folgenden mit den Buchstaben L.W. andeuten. Nachdem das Ganze während einiger Zeit im Thermostaten bei  $25.00^\circ \text{C.}$  ruhig gestanden hatte, pressten wir die überstehende Flüssigkeit in das Widerstandsgefäss (wir deuten dieses mit den Buchstaben W.G. an), ohne vorheriges Filtrieren. Das W.G. war vorher mit L.W. gereinigt worden. Bei diesen Versuchen beobachteten wir die überraschende Erscheinung, dass, falls einmal festes Sulfat in dem W.G. gewesen ist, jenes auf der Glasswand stets eine häufig unsichtbare Schicht zurücklässt, welche sich selbst durch intensives Spülen mit Wasser nicht entfernen lässt.

Wir liessen das Wasser während eines Tages, bzw. während mehrerer Tage ruhig in dem W.G. stehen, oder brachten es, zwecks Erzielung schnellerer Sättigung, in Bewegung, wie in § 6 unserer 7. Mitteilung erörtert wurde. In dieser Weise bildet sich durch Diffusion (bzw. durch



TABELLE 1.

Elektrisches Leitvermögen gesättigter Bariumsulfatlösungen bei 25.00° C.  
Die Lösung wurde in einem verschlossenen Schüttelgefäss (bezw. Gefäss) hergestellt.

Versuchs- nummer	Anzahl Bestim- mungen	Art und Weise, in der die Lösung hergestellt wurde	Leitvermögen in mho/cm		
			der Lösung (gemessen)	des L.W.	der gesät- tigten Lösung (Korrigiert)
58	10	grössere Stücke des reinen Bariumsulfats nach fünf- bis zehnmalem Dekantieren, während 2 bis 50 Std. mit Wasser stehen lassen.	4.36	1.48	2.88
59	20	L.W. während 1 bis 5 Tagen stehen lassen in einem Gefäss, in welchem sich auf der Innenwand eine dünne Schicht BaSO <sub>4</sub> befindet.	4.37	1.41	2.96
60	5	Einige BaSO <sub>4</sub> -Kristalle von 5 bis 250 $\mu$ nach fünfmaligem Dekantieren geschüttelt mit 50 cc L.W. während 1 bis 2 Tagen.	4.62	1.47	3.15
61	25	0.25 bis 2 g reines BaSO <sub>4</sub> nach fünf- bis zehnmalem Dekantieren, geschüttelt mit 50 cc L.W. während 2 bis 50 Std., wobei Kristalle entstehen, welche viel kleiner als 1 $\mu$ sind.	4.42	1.45	2.97
62	10	Wie Versuch 61.	4.10	1.11	2.98

Das Mittel von 70 Bestimmungen ergab sich zu  $2.99 \times 10^{-8}$  mho/cm.

schwache Konvektion) eine gesättigte Lösung, welche praktisch keinen Bodenkörper enthält (Versuch 59). Die Bariumsulfatschicht auf der Wand liess sich, wenn erwünscht, mittelst heisser, konzentrierter Schwefelsäure völlig entfernen.

b. Die gesättigte Lösung hat sich durch Schütteln gebildet.

2. Die Versuche 60, 61 und 62 (Tabelle 1) sind Schüttelversuche. Ist der Bodenkörper in genügender Menge vorhanden, so lässt sich die Sättigung innerhalb 1 bis 2 Std. erreichen, sowohl in ungesättigten wie in übersättigten Lösungen des Sulfats.

Nachdem sich die gröberen Teile desselben zu Boden gesetzt hatten (eventuell durch zentrifugieren), pressten wir, ohne zu filtrieren, die in den Versuchen 61 und 62 noch etwas trübe Flüssigkeit in unser W.G. No. 1. Jeder Versuch wurde 5 bis 25 Mal wiederholt; nur die Mittelwerte sind in Tabelle 1 aufgeführt. Die Abweichungen von diesen Mittelwerten betrugen höchstens  $\pm 0.15 \times 10^{-6}$  mho/cm.

Das zu jedem Versuch verwendete L.W. hatte, bevor es in das W.G. No. 2 gegeben wurde, möglichst dieselben Manipulationen durchgemacht, wie das zur betreffenden Lösung verwendete: es hatte während gleich langer Zeit in einem derartigen Gefäss gestanden, als in welchem sich die Lösung befand, bzw. war während gleich langer Zeit darin geschüttelt worden. Zu unserer Tabelle 1 ist noch Folgendes zu bemerken: Der etwas höhere Wert (3.15) im Versuch 60 hängt wohl mit der Art und Weise der Darstellung des hier verwendeten Präparates zusammen, welche nach § 12 unserer 7. Mitteilung vorgenommen war. Hier ist eine geringe Verunreinigung der Kristalle nicht ausgeschlossen.

Den Wert 2.88 im Versuch 58 erhielten wir ohne Schütteln nach kurzer Zeit, so dass die Möglichkeit vorliegt, dass die Sättigung noch nicht völlig erreicht war.

Das allgemeine Ergebnis ist, dass sich irgend ein Einfluss des Zerteilungsgrades des Bariumsulfats auf das elektrische Leitvermögen der gesättigten Lösung nicht nachweisen liess.

#### E. VERSUCHE MIT NICHT ZERRIEBENEM BARIUMSULFAT.

3. Zunächst stellten wir einige Versuche an, in denen die gesättigten Lösungen nicht, wie in unseren ersten Bestimmungen, in verschlossenen Gefässen hergestellt wurden, sondern in einem offenen Becherglase, an der Luft. In gleicher Weise führten wir auch die Versuche aus, in denen der Bodenkörper zerrieben wurde. (Vergl. unter F.)

Die Tabelle 2 enthält die Ergebnisse der Versuche mit nicht zerriebenem  $\text{BaSO}_4$ . Es ergab sich ein etwas höheres Leitvermögen, doch aus den Versuchen 64 und 65 ersehen wir, dass der Mittelwert ( $3.06 \times 10^{-6}$  mho/cm) innerhalb der Versuchsfehler mit demjenigen der Tabelle 1 übereinstimmt ( $2.99 \times 10^{-6}$  mho/cm). Diese Werte wurden nach kurzer Zeit erreicht (20 Min.), waren auch nach 3 Tagen unverändert geblieben, und wurden erhalten, indem wir die Lösung bzw. die Suspension des Sulfats in unser W.G. brachten, auf dessen Innenwand sich eine äusserst dünne Schicht des Sulfats abgelagert hatte.

##### a. Ionenadsorption an den Elektroden.

4. Brachte man die Lösung in ein gründlich gereinigtes W.G., aus dem diese Schicht mittels heisser, konzentrierter Schwefelsäure entfernt war, und letztere durch andauerndes Spülen mit L.W., so war das elektrische

TABELLE 2.

Elektrisches Leitvermögen gesättigter Bariumsulfatlösungen bei 25.00° C.  
Das Sulfat war nicht zerrieben.

Versuchs- nummer	Anzahl Bestim- mungen	Art und Weise, in der die Lösung hergestellt wurde	Leitvermögen in $10^{-6}$ mho/cm		
			der Lösung (gemessen)	des L.W.	der gesät- tigten Lösung (Korrigiert)
63	4	filtriert, bzw. nicht fil- triert in ein von $\text{BaSO}_4$ <i>befreites</i> Widerstandsge- fäß.	3.58	1.33	Mittel 2.25
64	5	nicht filtrierte Suspension in einem Widerstands- gefäß mit einer <i>dünnen</i> <i>Schicht von <math>\text{BaSO}_4</math></i> auf der Innenwand.	4.60	1.50	3.10
65	3	Lösung filtriert durch ein Glasfilter G4 bzw. G5 in ein Widerstandsgefäß mit einer <i>dünnen Schicht</i> <i>von <math>\text{BaSO}_4</math></i> auf der In- nenwand.	4.48	1.46	3.02
					3.06

Leitvermögen der Lösung viel geringer, wie aus den Versuchen 63 (Tabelle 2), 69 (Tabelle 4) und 73 (Tabelle 5) ersichtlich ist. Dasselbe blieb konstant, und war etwa um  $0.89 \times 10^{-6}$  mho/cm niedriger, als der Normalwert, falls wir die Lösung durch ein Glasfilter (siehe unten) in das W.G. filtrierten.

Eine nicht-filtrierte Suspension ergab, wenn dieselbe in ein gereinigtes W.G. gegeben wurde, ebenfalls einen geringeren Anfangswert; dieser stieg indes in 1 bis 2 Std., in kürzerer Zeit, wenn wir die Flüssigkeit in dem W.G. in Bewegung brachten (Vergl. § 6 unserer 7. Mitteilung), bis zu dem Normalwert der bei 25.00° C. gesättigten Lösung.

Da die Sättigung innerhalb relativ kurzer Zeit erreicht wurde, erklären wir das Eintreten dieses niederen Wertes, welcher auftritt, wenn die Lösung, bzw. die Suspension in ein gründlich gereinigtes W.G. gegeben wird, durch eine Ionenadsorption an den platiniierten Elektroden. Dabei verschwinden Ionen aus der Lösung, und infolgedessen nimmt die Leitfähigkeit derselben ab. Bringt man eine Suspension in das W.G., so kann Bariumsulfat in Lösung treten, und es bildet sich nach einiger Zeit eine gesättigte Lösung, während bei einer richtig filtrierten Lösung das Leitvermögen niedrig bleiben wird.

Unsere Versuche lassen sich demnach am Besten in einem W.G. ausführen, auf dessen Innenwand sich bereits eine dünne Schicht von Bariumsulfat befindet.

Bei richtig filtrierten Lösungen ist es notwendig ein derart vorbereitetes W.G. zu benutzen. Dann haben die Elektroden bereits eine genügende Menge des Sulfats adsorbiert, so dass man dann das tatsächliche Leitvermögen der gesättigten Lösung misst.

#### *b. Nicht-filtrierte Suspensionen.*

5. Zunächst stellten wir einige Versuche an (No. 64, Tabelle 2), in welchen die Suspension ohne vorangehende Filtrierung in das W.G. gebracht wurde.

#### *c. Filtrierte Lösungen.*

6. Im Versuch No. 65 filtrierten wir die Lösung durch ein Glasfilter. Dabei kam ein sorgfältigst mit heisser, konzentrierter, Schwefelsäure behandeltes Filter aus Jenaer Glas zur Verwendung, durch welches sodann L.W. gesaugt wurde. Die Poren der verwendeten Filter hatten einen mittleren Durchmesser von 5, bzw.  $1\ \mu$ . Das Glasfilter G5, ein s.g. Bakterienfilter, besteht aus einer Filterplatte mit sehr kleinen Poren (im Mittel Durchmesser  $1\ \mu$ ), welches sich auf einer zweiten, (G3), mit grösseren Poren befindet.

Man erzielt in dieser Art und Weise eine ziemlich befriedigende Trennung der Lösung von dem Bodenkörper, ohne irgend welche Verunreinigung in die Lösung zu bringen.

Ein derartiges Glasfilter wurde stets für einen blinden Versuch mit L.W. benutzt.

Da während des Absaugens durch das Filter auch Gase aus der Flüssigkeit entweichen, war deren Leitvermögen nach dem Filtrieren geringer geworden. Es steigt indes beim ruhigen Stehen der Flüssigkeit, da dieselbe dann wieder Gase aufnimmt. Das Verhalten der Lösung und das des L.W. im blinden Versuch war indes das nämliche. Bei jeder Bestimmung hatte das verwendete L.W. dieselbe Vorgeschichte, wie die Lösung; das Leitvermögen dieses Wassers ermittelten wir im W.G. No. 2.

Die Lösung brachten wir mittels einer Wasserstrahlpumpe in das W.G. Jede Bestimmung wurde mehrmals wiederholt; nur die Mittelwerte sind in Tabelle 2 aufgeführt. Meistens betrug die Abweichung der Einzelbestimmungen vom Mittelwert höchstens  $\pm 0.15 \times 10^{-6}$  mho/cm; im Versuch 63 stieg dieselbe indes auf das Doppelte.

### F. VERSUCHE MIT ZERRIEBENEM BARIUMSULFAT.

#### *a. Das Zerreibungsverfahren.*

7. Bevor wir das trockne  $\text{BaSO}_4$ , welches wir, gegen Staub geschützt, im Exsikkator über  $\text{P}_2\text{O}_5$  aufbewahrten, in eine bei  $25.00^\circ\text{C}$ . gesättigte Lösung des Sulfats brachten, zerrieben wir es in jedem Versuch während

10 Min. in einem gründlich gereinigten Achatmörser. Dieser war in konzentrierter Schwefelsäure, und sodann mehrmals in siedendem Wasser erhitzt, und unmittelbar vor der Benutzung mit Wasserdampf behandelt worden.

Wie bereits in § 2 unserer 7. Mitteilung erörtert wurde, ist auch, falls man ein völlig reines Präparat verwendet, von vornherein zu erwarten, dass beim Zusetzen desselben als feines Pulver zur gesättigten Lösung des Sulfats, das elektrische Leitvermögen der Lösung zunächst einen hohen Wert annehmen, und sodann langsam fallen wird. Unser reines Bariumsulfat zeigte tatsächlich dieses Verhalten. Dass sich diese Erscheinung nicht durch die Gegenwart einer Verunreinigung im Innern der Kristalle erklären lässt, ergibt sich aus der Tatsache, dass sich nach dem Zerreiben und darauf folgendem mehrmaligem Dekantieren (wobei dann eine eventuell vorhandene Verunreinigung zum Verschwinden kommen müsste), und darauf folgendem Trocknen des Niederschlags stets wieder dasselbe Verhalten beobachten liess. Selbst nach viermaligem Zerreiben und Dekantieren war das Leitvermögen der gesättigten Lösung nach abermaligem Zerreiben wiederum um ebensoviel höher, als nach dem ersten Mal. Unser Präparat war somit rein, und das beschriebene Verhalten wurde demnach durch den Zusatz des zerriebenen Sulfats zur gesättigten Lösung hervorgerufen.

8. Das Zerreiben führten wir sowohl unter Zusatz von Quarzpulver, wie auch ohne dieses Pulver aus. Letzteres war sorgfältigst durch behandeln mit heisser Salzsäure und darauffolgendem öfterem Dekantieren mit Wasser von Herrn chem. docts. H. L. RÖDER dargestellt worden, dem wir auch an dieser Stelle dafür unseren Dank aussprechen.

In blinden Versuchen, in welchen das Quarzpulver für sich im Mörser zerrieben, und sodann in L.W. gebracht wurde, fanden wir, dass das Pulver nur äusserst wenig verunreinigt war.

Sämtliche Versuche führten wir mit je 0.3 g einer ein für allemal gereinigten Portion des Quarzes aus, welche stets zu 150 cc L.W. gegeben wurden. In dieser Weise liessen sich ziemlich befriedigende, reproduzierbare Resultate erzielen. Das Leitvermögen des L.W., welches 1.40 betrug, ergab sich nach dem „Reiben“ im Mörser ohne Quarz zu etwa 1.60, und nach Zusatz des zerriebenen Quarzes zu 2.00 (bezw. etwas mehr)  $\times 10^{-6}$  mho/cm.

#### *b. Nicht-filtrierte Suspensionen.*

9. In Tabelle 3 sind die Ergebnisse aufgeführt, welche wir mit nicht-filtrierten Suspensionen unseres zerriebenen Bariumsulfats erhielten. Stets gaben wir das trockne, zerriebene Sulfat in 150 cc einer bei 25.00° C. gesättigten Lösung, welche sich in einem Becherglase befand. Da die Werte des Leitvermögens nicht konstant waren, sondern im Laufe von 1 bis 2 Tagen auf 3.00 bis  $3.15 \times 10^{-6}$  mho/cm fielen, geben wir in den Tabellen 3, 4 und 5 stets die Werte des Leitvermögens, welche wir fanden,



TABELLE 3.

Elektrisches Leitvermögen gesättigter Bariumsulfatlösungen bei 25.00° C.  
Trocken verriebenes Sulfat zugesetzt; die Suspensionen wurden *nicht* filtriert.

Versuchs- nummer	Anzahl Bestim- mungen	Zerriebene Stoffe	Nach 20 Min. war das Leitvermögen $10^{-6}$ mho/cm		
			der Lösung (gemessen)	des L.W.	der gesät- tigten Lösung (Korrigiert)
66	4	0.1 bis 0.3 g Bariumsulfat ohne Quarz.	5.25	1.55	3.70
67	4	0.4 bis 0.7 g Bariumsulfat ohne Quarz.	5.52	1.63	3.89
68	5	0.7 g Bariumsulfat +, 0.3 g Quarzpulver.	5.80	2.00	3.80

nachdem das Pulver sich während 20 Min. in der gesättigten Lösung bei 25.00° C. befunden hatte. Wir brachten die Flüssigkeit, welche in diesen Versuchen stark getrübt war, in derselben Weise in das W.G., als in den Versuchen, deren Ergebnis in Tabelle 2 aufgeführt wurde.

Auch hier betrug die Abweichung der Einzelbestimmungen von den in Tabelle 3 aufgeführten Mittelwerten höchstens  $\pm 0.15 \times 10^{-6}$  mho/cm.

Die Versuche 66 und 67 ergeben, dass die Menge des zugesetzten, zerriebenen  $\text{BaSO}_4$  einen geringen Unterschied zwischen den Anfangswerten des Leitvermögens der gesättigten Lösung bedingt.

### c. Filtrierte gesättigte Lösungen.

#### a. Bariumsulfat ohne Quarzpulver zerrieben.

10. Wir versuchten mittels Filtrierung durch die in § 6 beschriebenen Glasfilter G4 und G5 den zerriebenen Bodenkörper völlig, bzw. teilweise wieder von der Lösung zu trennen, und auf diesem Wege den zeitweiligen Ueberschuss der Ba-Ionen der Lösung zu entziehen (Vergl. § 2 und § 3 unserer 7. Mitteilung). Bei dieser Trennung werden die zum Bodenkörper gehörigen Gegenionen auf dem Filter zurückbleiben.

In der Tabelle 4 sind die Versuche verzeichnet, bei welchen der Bodenkörper ohne Quarz zerrieben wurde. Wir verwendeten hierbei stets 0.1 g  $\text{BaSO}_4$ , das wir nach 10 Min. reiben im Achatmörser, in 150 cc einer bei 25.00° C. gesättigten Lösung gaben. Dieselbe wurde sodann filtriert. Tatsächlich waren die so erhaltenen Werte viel niedriger, als im Versuch 67 der Tabelle 3; auch waren sie konstant: Es ist uns somit gelungen in diesem Falle den Bodenkörper völlig von der Lösung zu trennen. Der Mittelwert (3.17) stimmt fast ganz überein mit dem der Tabelle 2 (3.07), und demjenigen der Tabelle 1 (2.99). Die Tatsache, dass im Versuch 69 ein

TABELLE 4.

Elektrisches Leitvermögen gesättigter Bariumsulfatlösungen bei 25.00° C.  
Nach Zusatz von BaSO<sub>4</sub>, welches *ohne* Quarz zerrieben war, und nachfolgender  
Filtrierung.

Versuchs- nummer	Darstellung der Lösung	Nach 20 Min. beträgt das Leitvermögen in 10 <sup>-6</sup> mho/cm		
		der Lösung (gemessen)	des L.W.	der gesät- tigten Lösung (Korrigiert)
69	Filtrierte durch Filter G5 in ein ge- reinigtes W.G.	3.62	1.25	Mittel 2.37
70	Filtrierte durch Filter G4 in ein W.G. mit BaSO <sub>4</sub> auf der Innenwand.	5.06	1.82	3.24
71	Wie in Versuch 70.	4.83	1.64	3.19
72	Filtrierte durch Filter G5 in ein W.G. mit BaSO <sub>4</sub> auf der Innenwand.	4.36	1.29	3.07

3.17

geringerer Wert gefunden wurde, welcher konstant blieb, sowie der geringe Wert im Versuch 73 (Tabelle 5) lässt sich, wie oben (§ 4) bereits betont wurde, durch Ionen-Adsorption an den platinieren Elektroden des gereinigten W.G. erklären.

#### b. Bariumsulfat mit Quarzpulver zerrieben.

11. In derselben Weise, wie oben beschrieben, stellten wir einige Versuche an, bei denen stets 0.7 g BaSO<sub>4</sub> mit 0.3 g Quarzpulver im Achatmörser verrieben wurden. Nachdem die Lösung filtrierte war, ermittelten wir das Leitvermögen derselben aufs neue, und zwar nachdem das zerriebene Pulver während 20 Min. mit 150 cc einer bei 25.00° C gesättigten Lösung in Berührung geblieben war.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 zusammengestellt. Es zeigt sich, dass nunmehr die Trennung des zerriebenen Bodenkörpers von der Lösung nur teilweise stattgefunden hat. Bei Verwendung des Glasfilters G4 (Mittlere Porenweite 5  $\mu$ ) und des Glasfilters G5 (mittlere Porenweite 1  $\mu$ ) geht ein ziemlich grosser Teil des Bodenkörpers, der mittels des Quarzpulvers sehr stark zerrieben ist, noch durch das Filter, und erteilt der Lösung ein grösseres Leitvermögen. Es zeigt sich somit, dass der Dispersitätseffekt ein scheinbar grösseres Leitvermögen hervorruft.

Vergleicht man den Versuch 68 (Tabelle 3), in welchem nicht filtrierte wurde, mit demjenigen der Tabelle 5, wo dies wohl der Fall war, und zwar durch ein Filter G4 oder ein Filter G5, so finden wir als Mittelwert des Leitvermögens nach 20 Min. 3.80, 3.66 bzw.  $3.44 \times 10^{-6}$  mho/cm. Nach-

TABELLE 5.

Elektrisches Leitvermögen gesättigter  $\text{BaSO}_4$ -Lösungen bei  $25.00^\circ \text{C}$ .  
Nach Zusatz von  $\text{BaSO}_4$ , welches mit Quarz zerrieben war und nachfolgender  
Filtrierung.

Versuchs- nummer	Art und Weise, in der die Lösung hergestellt wurde.	Nach 20 Min. beträgt das Leitvermögen in $10^{-6}$ mho/cm		
		der Lösung (gemessen)	des L.W.	der gesät- tigten Lösung (Korrigiert)
73	Filtrierte durch Filter G5 in ein ge- reinigtes W.G.	4.60	1.96	Mittel 2.64
74	Filtrierte durch Filter G4 in ein W.G. mit $\text{BaSO}_4$ auf der Innenwand.	6.06	2.42	3.64
75	Wie Versuch 74.	6.07	2.44	3.63
76	Wie Versuch 74.	5.73	2.01	3.72
77	Filtrierte durch Filter G5 in ein W.G. mit $\text{BaSO}_4$ auf der Innenwand.	5.46	2.02	3.44
78	Wie Versuch 77.	5.54	2.10	3.44

dem die Lösung 1 bis 2 Tage gestanden hatte, war das Leitvermögen in sämtlichen drei Fällen auf  $3.00$  bis  $3.15 \times 10^{-6}$  mho/cm gefallen.

Es tritt somit sehr ausgesprochen der Einfluss des Filtrierens zu Tage. Wäre es möglich den Bodenkörper in idealer Weise von der Lösung zu trennen, so würde auch sofort (nach 20 Min.) das Leitvermögen ein niedriges sein, wie es nahezu bei den Versuchen der Tabelle 4 der Fall ist. Wir glauben dementsprechend aus unseren Versuchen den Schluss ziehen zu dürfen, dass sich ein Einfluss des Dispersitätsgrades des Bariumsulfats, auch nach dem Zerreiben mit, bzw. ohne Quarzpulver, auf das elektrische Leitvermögen der von Bodenkörper völlig befreiten, gesättigten Lösung, nicht nachweisen lässt.

Dasselbe gilt somit für einen solchen Einfluss auf die Löslichkeit des Bariumsulfats in Wasser.

In einer folgenden Mitteilung beabsichtigen wir die Versuche zu beschreiben, welche dieses Ergebnis auf polarographischem Wege erhärten.

### *Zusammenfassung.*

Es wurde festgestellt, dass sich ein Einfluss des Dispersitätsgrades auf die Löslichkeit eines kristallisierten, chemisch- und physikalisch reinen Stoffes ( $\text{BaSO}_4$ ) nicht nachweisen lässt, falls man durch geeignetes Filtrieren der gesättigten Lösung desselben, dem Auftreten des „Dispersitätseffekts“ vorbeugt.

VAN 'T HOFF-Laboratorium.

Utrecht, Januar 1940.

**Mathematics.** — *Ueber BESSELSche, STRUVESche und LOMMELSche Funktionen.* (Erste Mitteilung). Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

LITERATURVERZEICHNIS.

E. W. BARNES.

1. The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **5**, 59—116 (1907).

E. W. HOBSON.

2. The theory of spherical and ellipsoidal harmonics (1931).

H. M. MACDONALD.

3. Some applications of FOURIER's theorem, *Proc. London Math. Soc.*, **35**, 428—443 (1903).

T. M. MACROBERT.

4. Derivation of LEGENDRE function formulae from BESSEL function formulae, *Philosophical Magazine*, (7) **21**, 697—703 (1936).

K. MAYR.

5. Ueber bestimmte Integrale und hypergeometrische Funktionen. *Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften in Wien*, (IIa) **141**, 227—265 (1932). Siehe auch die Berichtigung, *Ibidem*, (IIa) **142**, 17 (1933).

C. S. MEIJER.

6. Ueber die Integraldarstellungen der WHITTAKERSchen Funktion  $W_{k,m}(z)$  und der HANKELschen und BESSELSchen Funktionen. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, (2) **18**, (2tes Heft), 35—57 (1934).
7. Ueber WHITTAKERSche bzw. BESSELSche Funktionen und deren Produkte. *Ibidem*, (2) **18**, (4tes Heft), 10—39 (1936).
8. Integraldarstellungen aus der Theorie der BESSELSchen Funktionen. *Proc. London Math. Soc.*, (2) **40**, 1—22 (1936).
9. Neue Integraldarstellungen aus der Theorie der WHITTAKERSchen und HANKELschen Funktionen. *Math. Ann.*, **112**, 469—489 (1936).
10. Einige Integraldarstellungen aus der Theorie der BESSELSchen und WHITTAKERSchen Funktionen. *Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam*, **39**, 394—403 und 519—527 (1936).
11. Ueber Produkte von WHITTAKERSchen Funktionen. *Ibidem*, **40**, 133—141 und 259—263 (1937).
12. Integraldarstellungen WHITTAKERScher Funktionen. *Ibidem*, **41**, 1096—1107 (1938) und **42**, 141—146 (1939).
13. Zur Theorie der hypergeometrischen Funktionen. *Ibidem*, **42**, 355—369 (1939).
14. Integraldarstellungen für STRUVESche und BESSELSche Funktionen. *Compositio Mathematica*, **6**, 348—367 (1939).
15. Neue Integraldarstellungen für BESSELSche Funktionen. *Compositio Mathematica* (Diese Arbeit wird demnächst erscheinen).

N. NIELSEN.

16. *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen* (1904).

G. N. WATSON.

17. *A treatise on the theory of BESSEL functions* (1922).

E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON.

18. *A course of modern analysis* (fourth edition, 1927).

§ 1. Ich werde zunächst einige Integralformeln ableiten für die Funktion  $G_{p,q}^{m,n}(\zeta)$ , die ich schon öfters <sup>1)</sup> betrachtet habe.

Die Funktion  $G_{p,q}^{m,n}(\zeta)$  wird definiert durch <sup>2)</sup>

$$G_{p,q}^{m,n} \left( \zeta \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \sum_{h=1}^m \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - b_h) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 + b_h - a_j)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 + b_h - b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - b_h)} \zeta^{b_h} \times \left\{ \begin{matrix} (1) \\ \times {}_pF_{q-1}(1 + b_h - a_1, \dots, 1 + b_h - a_p; 1 + b_h - b_1, \dots, 1 + b_h - b_q; (-1)^{m+n+p} \zeta) \end{matrix} \right\}.$$

Hierin wird  $\zeta \neq 0$ ,

$$0 \leq n \leq p \leq q - 1, \quad 1 \leq m \leq q, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$b_j - b_h \text{ nicht ganz } (j=1, \dots, m; h=1, \dots, m; j \neq h). \quad . \quad . \quad (3)$$

und

$$a_j - b_h \neq 1, 2, 3, \dots (j=1, \dots, n; h=1, \dots, m). \quad . \quad . \quad (4)$$

vorausgesetzt; der Stern bedeutet, dass die Zahl  $1 + b_h - b_h$  im System  $1 + b_h - b_1, \dots, 1 + b_h - b_q$  gestrichen werden muss.

Ich beweise jetzt

**Satz 1.** Ist  $m \geq 2$ ,  $2m + 2n - p - q \geq 0$ ,

$$\zeta \neq 0, \quad \arg \zeta \leq (m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q)\pi,$$

$$\Re(a_j) - 1 < \Re(b_1), \quad \Re(a_j) - 1 < \Re(b_2) \quad (j=1, \dots, n). \quad . \quad . \quad (5)$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \Re(a_j) - \sum_{j=1}^q \Re(b_j) + (q-p) \Re(b_1) + \frac{1}{2}(q-p+1) &> 0, \\ \sum_{j=1}^p \Re(a_j) - \sum_{j=1}^q \Re(b_j) + (q-p) \Re(b_2) + \frac{1}{2}(q-p+1) &> 0, \end{aligned} \quad (6)$$

so besitzt die Funktion  $G_{p,q}^{m,n}(\zeta)$  die Integraldarstellung <sup>3)</sup>

$$G_{p,q}^{m,n} \left( \zeta \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta - b_1 - b_2)} \int_1^\infty G_{p,q}^{m,n} \left( \zeta v \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ \alpha, \beta, b_3, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \times {}_2F_1(\alpha - b_1, \alpha - b_2; \alpha + \beta - b_1 - b_2; 1 - v) (v-1)^{\alpha + \beta - b_1 - b_2 - 1} v^{-\beta} dv. \quad (7)$$

<sup>1)</sup> MEIJER, [7], [10], [11], [14], [15].

<sup>2)</sup> Man vergl. [7], Formel (6). Ist  $p=0$ , so wird die Funktion  $G$  durch  $G_{0,q}^{m,0}(\zeta | b_1, \dots, b_q)$  bezeichnet.

<sup>3)</sup> Es wird natürlich angenommen, dass die Funktion  $G_{p,q}^{m,n}(\zeta)$  einen Sinn hat; d.h. also: Es wird angenommen, dass auch (2), (3) und (4) erfüllt sind.

Die rechte Seite von (7) ist wegen

$${}_2F_1(\lambda, \mu; \nu; 1 - v) = v^{\nu - \lambda - \mu} {}_2F_1(\nu - \mu, \nu - \lambda; \nu; 1 - v)$$

symmetrisch in Bezug auf  $\alpha$  und  $\beta$ .





Nun besitzt die auf der rechten Seite von (7) vorkommende Funktion  $G_{p,q}^{m,n}(\zeta v)$  für  $|\arg(\zeta v)| < (m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$  die Integraldarstellung <sup>6)</sup>

$$G_{p,q}^{m,n} \left( \zeta v \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ a, \beta, b_3, \dots, b_q \end{array} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma(a-s) \Gamma(\beta-s) \prod_{j=3}^m \Gamma(b_j-s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1-b_j+s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j-s)} (\zeta v)^s ds; \quad (15)$$

hierin läuft der Integrationsweg  $L$  von  $-\infty i + \varrho$  nach  $\infty i + \varrho$  ( $\varrho$  ist eine beliebige reelle Zahl) und zwar so, dass die Punkte  $a, a+1, a+2, \dots, \beta, \beta+1, \beta+2, \dots$  und  $b_j, b_j+1, b_j+2, \dots$  ( $j=3, \dots, m$ ) auf der rechten, die Punkte  $a_j-1, a_j-2, a_j-3, \dots$  ( $j=1, \dots, n$ ) dagegen auf der linken Seite von  $L$  liegen <sup>7)</sup>.

Auf Grund von (5) kann man den Integrationsweg  $L$  derart wählen, dass  $\Re(s) < \Re(b_1)$  und  $< \Re(b_2)$  ist für alle Punkte  $s$  von  $L$ ; es gilt daher (siehe auch (8))

$$\Re(a + \beta - b_1 - b_2) > 0, \quad \Re(b_1 - s) > 0, \quad \Re(b_2 - s) > 0,$$

so dass aus (14) folgt <sup>8)</sup>

$$\int_1^\infty {}_2F_1(a-b_1, a-b_2; a+\beta-b_1-b_2; 1-v) (v-1)^{a+\beta-b_1-b_2-1} v^{s-\beta} dv = \frac{\Gamma(a+\beta-b_1-b_2) \Gamma(b_1-s) \Gamma(b_2-s)}{\Gamma(a-s) \Gamma(\beta-s)}. \quad (16)$$

Aus (15) und (16) ergibt sich nun <sup>9)</sup>, dass die rechte Seite von (7) den Wert

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j-s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1-b_j+s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j-s)} \zeta^s ds$$

besitzt; und dieser Ausdruck ist eine Integraldarstellung der Funktion

$$G_{p,q}^{m,n} \left( \zeta \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right),$$

so dass der erste Fall erledigt ist.

<sup>6)</sup> Man vergl. BARNES, [1], 65–71.

<sup>7)</sup> Dies ist möglich wegen (12) und (4).

<sup>8)</sup> Ich ersetze  $\kappa, \lambda, \sigma, \tau$  bezw. durch  $\beta-b_2, a-b_2, a+\beta-b_1-b_2, b_1-s$ .

<sup>9)</sup> Ich setze das Integral (15) in die rechte Seite von (7) ein, vertausche die Integrationsfolge und benutze (16).

2. Es sei  $2m + 2n - p - q > 0$  und  $|\arg \zeta| = (m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q)\pi$ . Ich brauche die asymptotischen Entwicklungen der Funktion  $G_{p,q}^{q,n}(z)$  für grosse Werte von  $|z|$ .

Die asymptotische Entwicklung von  $G_{p,q}^{q,0}(z)$  lautet <sup>10)</sup>

$$G_{p,q}^{q,0}\left(z \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ \alpha, \beta, b_3, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \sim \exp\left((p-q) z^{\frac{1}{q-p}}\right) z^{\vartheta} \left\{ A_0 + \frac{A_1}{z^{\frac{1}{q-p}}} + \frac{A_2}{z^{\frac{2}{q-p}}} + \dots \right\}, \quad (17)$$

worin

$$\vartheta = \frac{1}{q-p} \left\{ \frac{1}{2}(p-q+1) + \alpha + \beta + \sum_{j=3}^q b_j - \sum_{j=1}^p a_j \right\}.$$

Diese Entwicklung gilt, falls  $p=q-1$  ist, für  $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$ ; ist  $p < q-1$ , so gilt (17) für  $|\arg z| < (q-p+1)\pi$ .

Ist  $n \geq 1$ , so besitzt  $G_{p,q}^{q,n}(z)$  eine asymptotische Entwicklung der Gestalt <sup>11)</sup>

$$G_{p,q}^{q,n}\left(z \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ \alpha, \beta, b_3, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \sim \sum_{j=1}^n z^{-1+a_j} \left\{ B_{j,0} + \frac{B_{j,1}}{z} + \frac{B_{j,2}}{z^2} + \dots \right\} \quad [|\arg z| < (\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}p + n)\pi]. \quad (18)$$

Ferner brauche ich noch <sup>12)</sup>

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a-b_1, a-b_2; a + \beta - b_1 - b_2; 1-v)(v-1)^{\alpha+\beta-b_1-b_2-1} v^{-\beta} \\ = (\mu v^{-1-b_1} + \nu v^{-1-b_2}) \{ 1 + O(v^{-1}) \} \quad (v \rightarrow \infty); \end{aligned} \quad (19)$$

hierin sind  $\mu$  und  $\nu$  nicht von  $v$  abhängig.

Nun folgt aus der Definition (1)

$$\begin{aligned} G_{p,q}^{m,n}\left(z \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = -\frac{1}{2\pi i} \left\{ e^{-\pi i b_{m+1}} G_{p,q}^{m+1,n}\left(z e^{\pi i} \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \right. \\ \left. + e^{\pi i b_{m+1}} G_{p,q}^{m+1,n}\left(z e^{-\pi i} \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

<sup>10)</sup> BARNES, [1], 80 und 108–110.

Die im Folgenden vorkommenden Zahlen  $A_j$ ,  $B_{j,h}$ ,  $C_h$ ,  $D_h$ ,  $c, d$  und  $f$  sind nicht von  $z$  abhängig.

<sup>11)</sup> BARNES, [1], 65–71.

<sup>12)</sup> Man vergl. WHITTAKER and WATSON, [18], § 14.51.

und

$$G_{p,q}^{m,n} \left( z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = -\frac{1}{2\pi i} \left\{ e^{-\pi i a_{n+1}} G_{p,q}^{m,n+1} \left( z e^{\pi i} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \right. \\ \left. - e^{\pi i a_{n+1}} G_{p,q}^{m,n+1} \left( z e^{-\pi i} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \right\}. \quad (21)$$

Durch wiederholte Anwendung von (20) bekommt man

$$G_{p,q}^{m,n}(z) = C_0 G_{p,q}^{q,n}(z e^{(q-m)\pi i}) + \sum_{h=1}^{q-m} C_h G_{p,q}^{q,n}(z e^{(q-m-2h)\pi i}). \quad (22)$$

Aus (21) mit  $n-1$  statt  $n$ ,  $z e^{-\pi i}$  statt  $z$  und  $m=q$  geht hervor

$$G_{p,q}^{q,n}(z) = c G_{p,q}^{q,n-1}(z e^{-\pi i}) + d G_{p,q}^{q,n}(z e^{-2\pi i});$$

mit Hilfe dieser Beziehung beweist man leicht

$$G_{p,q}^{q,n}(z) = f G_{p,q}^{q,0}(z e^{-n\pi i}) + \sum_{h=0}^{n-1} D_h G_{p,q}^{q,n-h}(z e^{-(h+2)\pi i}).$$

Ersetzt man hierin  $z$  durch  $z e^{(q-m)\pi i}$  und führt man das so gefundene Resultat auf die rechte Seite von (22) ein, so erhält man

$$G_{p,q}^{m,n}(z) = C_0 f G_{p,q}^{q,0}(z e^{(q-m-n)\pi i}) \\ + C_0 \sum_{h=0}^{n-1} D_h G_{p,q}^{q,n-h}(z e^{(q-m-h-2)\pi i}) + \sum_{h=1}^{q-m} C_h G_{p,q}^{q,n}(z e^{(q-m-2h)\pi i}). \quad (23)$$

Nach dem ersten Fall gilt Formel (7) für  $|\arg \zeta| < (m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$ . Aus (23) folgt aber mit Rücksicht auf (19) und die asymptotischen Entwicklungen (17) und (18), dass (7) gültig bleibt für  $\arg \zeta = (m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$ , wenn nur  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a_j$  und  $b_j$  nicht nur (5), (8), (10), (11) und (12), sondern überdies noch (9) genügen<sup>13)</sup>.

Auf analoge Weise zeigt man, dass (7) unter dieser Voraussetzung auch gilt für  $\arg \zeta = -(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$ .

Hiermit ist der zweite Fall erledigt.

3. Es sei  $2m+2n-p-q=0$ , also  $m=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q-n$ . Wegen (2) gilt daher  $m \leq q-n-\frac{1}{2}$ , somit  $m+1 \leq q$ . Die Funktion  $G_{p,q}^{m+1,n}(\zeta)$  hat also einen Sinn (siehe (2)) und nach dem ersten und zweiten Fall gilt (7) mit  $m+1$  statt  $m$ , und zwar für  $|\arg \zeta| \leq \pi$ . Formel (7) folgt nun mit Hilfe von (20) aus (7) mit  $m+1$  statt  $m$ .

Hiermit ist auch der dritte Fall erledigt.

<sup>13)</sup> Bedingung (6) folgt aus (8) und (9).

Satz 2. Ist  $m \geq 1$ ,  $2m + 2n - p - q \geq 0$ ,

$$\zeta \neq 0, \quad |\arg \zeta| \leq (m + n - \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}q)\pi,$$

$$\Re(a_j) - 1 < \Re(b_1) \quad (j=1, \dots, n) \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

und

$$\sum_{j=1}^p \Re(a_j) - \sum_{j=1}^q \Re(b_j) + (q-p) \Re(b_1) + \tfrac{1}{2}(q-p+1) > 0, \quad . \quad (25)$$

so besitzt die Funktion  $G_{p,q}^{m,n}(\zeta)$  die Integraldarstellung

$$G_{p,q}^{m,n} \left( \zeta \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - b_1)} \int_1^\infty G_{p,q}^{m,n} \left( \zeta v \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ \alpha, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) (v-1)^{\alpha-b_1-1} v^{-\alpha} dv. \quad (26)$$

Hierin ist  $\alpha$  beliebig mit

$$\Re(\alpha) > \Re(b_1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

$$\Re(\alpha) < \sum_{j=1}^p \Re(a_j) - \sum_{j=2}^q \Re(b_j) + (q-p) \Re(b_1) + \tfrac{1}{2}(q-p+1), \quad . \quad (28)$$

$$\alpha - b_j \text{ nicht ganz} \quad (j=2, \dots, m), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

$$a_j - \alpha \neq 1, 2, 3, \dots \quad (j=1, \dots, n). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Ist  $2m + 2n - p - q > 0$  und zugleichzeitig  $|\arg \zeta| < (m + n - \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}q)\pi$ , so gilt Formel (26) für alle Werte von  $\alpha, a_j$  ( $j=1, \dots, p$ ) und  $b_j$  ( $j=1, \dots, q$ ) mit (24), (27), (29) und (30); die Bedingungen (25) und (28) brauchen dann also nicht erfüllt zu sein.

Der Beweis<sup>14)</sup> geht gerade so wie derjenige von Satz 1; statt (16) benutze man

$$\int_1^\infty (v-1)^{\alpha-b_1-1} v^{s-\alpha} dv = \frac{\Gamma(\alpha-b_1) \Gamma(b_1-s)}{\Gamma(\alpha-s)}.$$

In § 2 gebe ich verschiedene Funktionen, die Spezialfälle von  $G_{p,q}^{m,n}(\zeta)$  sind.

Die §§ 3–10 bringen Anwendungen der Sätze 1 und 2. Viele Sonderfälle von Satz 2 und einige einfache Sonderfälle von Satz 1 waren schon bekannt.

Bei einer andren Gelegenheit hoffe ich (7) und (26) auf WHITTAKERSche Funktionen anzuwenden.

<sup>14)</sup> Für  $\beta = b_2$  geht (7) wegen  ${}_2F_1(\lambda, \mu; \lambda, w) = (1-w)^{-\mu}$  in (26) über. Formel (26) mit  $m \geq 2$  ist daher ein Spezialfall von (7).



§ 2. Ich benutze die üblichen Bezeichnungen.

Die BESSELSchen Funktionen  $J_\nu(z)$ ,  $I_\nu(z)$  und  $Y_\nu(z)$  werden definiert durch

$$J_\nu(z) = \frac{2^{-\nu} z^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1(\nu+1; -\tfrac{1}{4}z^2), \quad I_\nu(z) = \frac{2^{-\nu} z^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1(\nu+1; \tfrac{1}{4}z^2) \quad (31)$$

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \nu \pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu \pi} \quad (32)$$

Die Funktion  $K_\nu(z)$  und die HANKELschen Funktionen  $H_\nu^{(1)}(z)$  und  $H_\nu^{(2)}(z)$  werden definiert durch <sup>15)</sup>

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} \{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\} \quad (33)$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{2}{\pi i} e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} K_\nu(z e^{-\frac{1}{2}\pi i}), \quad H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{2}{\pi i} e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} K_\nu(z e^{\frac{1}{2}\pi i}).$$

Die STRUVESchen Funktionen  $\mathbf{H}_\nu(z)$  und  $\mathbf{L}_\nu(z)$  werden definiert durch

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\nu(z) &= \frac{2^{-\nu-1} z^{\nu+1}}{\Gamma(\nu + \tfrac{3}{2}) \Gamma(\tfrac{3}{2})} {}_1F_2(1; \tfrac{3}{2}, \nu + \tfrac{3}{2}; -\tfrac{1}{4}z^2), \\ \mathbf{L}_\nu(z) &= \frac{2^{-\nu-1} z^{\nu+1}}{\Gamma(\nu + \tfrac{3}{2}) \Gamma(\tfrac{3}{2})} {}_1F_2(1; \tfrac{3}{2}, \nu + \tfrac{3}{2}; \tfrac{1}{4}z^2). \end{aligned} \quad (34)$$

Die LOMMELSche Funktion  $S_{\mu, \nu}(z)$  wird definiert durch <sup>16)</sup>

$$\begin{aligned} S_{\mu, \nu}(z) &= \frac{z^{\mu+1}}{(\mu + \nu + 1)(\mu - \nu + 1)} {}_1F_2(1; \tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2}\nu + \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\nu + \tfrac{3}{2}; -\tfrac{1}{4}z^2) \\ &\quad - \frac{2^{\mu-1} \Gamma(\tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2}\nu + \tfrac{1}{2}) \Gamma(\tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\nu + \tfrac{1}{2})}{\sin \nu \pi} \{J_\nu(z) \cos(\tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2}\nu)\pi - J_{-\nu}(z) \cos(\tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\nu)\pi\}. \end{aligned}$$

Ferner bezeichnet  $W_{k, m}(z)$  die WHITTAKERSche Funktion <sup>17)</sup>.

Zur Abkürzung setze ich schliesslich

$$T_{\nu, \mu}(z) = H_\nu^{(1)}(z) H_\mu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z) H_\mu^{(2)}(z),$$

$$U_{\nu, \mu}(z) = \frac{1}{2i} \{e^{\frac{1}{2}(\nu-\mu)\pi i} H_\nu^{(1)}(z) H_\mu^{(2)}(z) - e^{\frac{1}{2}(\mu-\nu)\pi i} H_\mu^{(1)}(z) H_\nu^{(2)}(z)\},$$

$$V_{\nu, \mu}(z) = \frac{1}{2} \{e^{\frac{1}{2}(\nu-\mu)\pi i} H_\nu^{(1)}(z) H_\mu^{(2)}(z) + e^{\frac{1}{2}(\mu-\nu)\pi i} H_\mu^{(1)}(z) H_\nu^{(2)}(z)\}.$$

<sup>15)</sup> Die Beziehungen (32) und (33) gelten, falls  $\nu$  nicht ganz ist; für ganze Werte von  $\nu$  kann man  $Y_\nu(z)$  und  $K_\nu(z)$  durch Grenzübergang definieren; man vergl. WATSON, [17], 63–64 und 78.

<sup>16)</sup> Ist  $\mu \pm \nu = -1, -3, -5, \dots$  oder  $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , so wird  $S_{\mu, \nu}(z)$  durch Grenzübergang definiert; man vergl. WATSON, [17], 347–349.

<sup>17)</sup> Man vergl. WHITTAKER and WATSON, [18], Chapter XVI.

Unter Annahme der obigen Bezeichnungen gelten die folgenden Relationen <sup>18)</sup>

$$J_\nu(z) = G_{0,2}^{1,0} \left( \frac{1}{4} z^2 \middle| \frac{1}{2} \nu, -\frac{1}{2} \nu \right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} G_{0,2}^{2,0} \left( \frac{1}{4} z^2 \middle| \frac{1}{2} \nu, -\frac{1}{2} \nu \right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

$$Y_\nu(z) = (-1)^h G_{1,3}^{2,0} \left( \frac{1}{4} z^2 \middle| \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \nu - h - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \nu, \frac{1}{2} \nu, -\frac{1}{2} \nu - h - \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad (h=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (37)$$

$$H_\nu(z) = G_{1,3}^{1,1} \left( \frac{1}{4} z^2 \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu, -\frac{1}{2} \nu, \frac{1}{2} \nu \end{array} \right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

$$I_\nu(z) - L_\nu(z) = \frac{1}{\pi} G_{1,3}^{2,1} \left( \frac{1}{4} z^2 \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu, \frac{1}{2} \nu, -\frac{1}{2} \nu \end{array} \right), \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

$$I_{-\nu}(z) - L_\nu(z) = \frac{\cos \nu \pi}{\pi} G_{1,3}^{2,1} \left( \frac{1}{4} z^2 \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu, -\frac{1}{2} \nu, \frac{1}{2} \nu \end{array} \right), \quad . \quad . \quad (40)$$

$$H_\nu(z) - Y_\nu(z) = \frac{\cos \nu \pi}{\pi^2} G_{1,3}^{3,1} \left( \frac{1}{4} z^2 \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu, -\frac{1}{2} \nu, \frac{1}{2} \nu \end{array} \right), \quad . \quad . \quad (41)$$

$$S_{\nu,\nu}(z) = \frac{2^{\nu-1}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \nu) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \nu)} G_{1,3}^{3,1} \left( \frac{1}{4} z^2 \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \nu, \frac{1}{2} \nu, -\frac{1}{2} \nu \end{array} \right), \quad . \quad (42)$$

$$e^{-\frac{1}{2}z} W_{k,m}(z) = \frac{2^{\frac{1}{2}k} z^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} G_{2,4}^{4,0} \left( \frac{1}{4} z^2 \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{4} - \frac{1}{2} k, \frac{3}{4} - \frac{1}{2} k \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} m, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} m, \frac{1}{2} m, -\frac{1}{2} m \end{array} \right), \quad . \quad (43)$$

$$J_\nu^2(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} G_{1,3}^{1,1} \left( z^2 \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \nu, -\nu, 0 \end{array} \right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

$$J_\nu(z) Y_\nu(z) = - \frac{1}{\sqrt{\pi}} G_{1,3}^{2,0} \left( z^2 \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \nu, 0, -\nu \end{array} \right), \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

$$J_{-\nu}^2(z) - J_\nu^2(z) = \frac{2 \sin \nu \pi}{\sqrt{\pi}} G_{1,3}^{2,0} \left( z^2 \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \nu, -\nu, 0 \end{array} \right), \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

$$I_{-\nu}^2(z) - I_\nu^2(z) = \frac{\sin 2\nu \pi}{\pi^{\frac{3}{2}}} G_{1,3}^{2,1} \left( z^2 \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \nu, -\nu, 0 \end{array} \right), \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

$$I_\nu(z) K_\nu(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{1,3}^{2,1} \left( z^2 \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \nu, 0, -\nu \end{array} \right), \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

<sup>18)</sup> Man vergl. [7], 12–17; [10], 397–398.

$$K_r^2(z) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} G_{1,3}^{3,0} \left( z^2 \left| \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \nu, -\nu, 0 \end{matrix} \right. \right), \quad \dots \quad (49)$$

$$H_\nu^{(1)}(z) H_\nu^{(2)}(z) = \frac{2 \cos \nu \pi}{\pi^{\frac{3}{2}}} G_{1,3}^{3,1} \left( z^2 \left| \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \nu, -\nu, 0 \end{matrix} \right. \right), \quad \dots \quad (50)$$

$$T_{\nu,\mu}(z) = \frac{4}{i \sqrt{\pi}} G_{2,4}^{3,0} \left( z^2 \left| \begin{matrix} 0, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix} \right. \right), \quad (51)$$

$$K_\mu(z) K_\nu(z) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} G_{2,4}^{4,0} \left( z^2 \left| \begin{matrix} 0, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix} \right. \right), \quad (52)$$

$$U_{\nu,\mu}(z) = \frac{2 \sin \left( \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu \right) \pi \sin \left( \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu \right) \pi}{\pi^{\frac{3}{2}}} \left\{ \begin{matrix} 0, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix} \right\} \times G_{2,4}^{4,1} \left( z^2 \left| \begin{matrix} 0, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix} \right. \right), \quad (53)$$

$$V_{\nu,\mu}(z) = \frac{2 \cos \left( \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu \right) \pi \cos \left( \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \right) \pi}{\pi^{\frac{3}{2}}} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}, 0 \\ \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix} \right\} \times G_{2,4}^{4,1} \left( z^2 \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}, 0 \\ \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix} \right. \right). \quad (54)$$

Schliesslich gebe ich noch zwei Hilfsformeln, die ich in den §§ 3—10 häufig benutzen werde:

$$G_{p,q}^{m,n} \left( \zeta \left| \begin{matrix} a_1 + \tau, \dots, a_p + \tau \\ b_1 + \tau, \dots, b_q + \tau \end{matrix} \right. \right) = \zeta^\tau G_{p,q}^{m,n} \left( \zeta \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right), \quad \dots \quad (55)$$

$$G_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left( \zeta \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p, \sigma \\ \sigma, b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = G_{p,q}^{m,n} \left( \zeta \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \quad (p \geq n, m \geq 1). \quad (56)$$

Diese Formeln folgen leicht aus der Definition der Funktion  $G_{p,q}^{m,n}(\zeta)$ .

§ 3. Ich werde (7) und (26) zunächst auf (35), (36) und (37) anwenden. Es wird sich zeigen, dass verschiedene bekannte Integraldarstellungen der Funktionen  $J_\nu(z)$ ,  $K_\nu(z)$  und  $Y_\nu(z)$  nur Spezialfälle von (7) oder (26) sind.

Ich betrachte erst die Funktion  $J_\nu(z)$ . Durch Anwendung von (26) mit  $\zeta = \frac{1}{4} z^2$  und  $\nu = u^2$  auf (35) finde ich, falls  $z > 0$  und  $0 < \Re(a - \frac{1}{2}\nu) < \Re(\nu) + \frac{3}{2}$  ist,

$$J_\nu(z) = \frac{2}{\Gamma(a - \frac{1}{2}\nu)} \int_1^\infty G_{0,2}^{1,0} \left( \frac{1}{4} z^2 u^2 \left| \begin{matrix} \alpha, -\frac{1}{2}\nu \end{matrix} \right. \right) (u^2 - 1)^{\alpha - \frac{1}{2}\nu - 1} u^{1-2\alpha} du. \quad (57)$$

Nun folgt aus (55) und (35)

$$G_{0,2}^{1,0} \left( \frac{1}{4} \zeta^2 \mid \frac{1}{2} \nu + \lambda, -\frac{1}{2} \nu \right) \\ = \left( \frac{1}{2} \zeta \right)^\lambda G_{0,2}^{0,0} \left( \frac{1}{4} \zeta^2 \mid \frac{1}{2} \nu + \frac{1}{2} \lambda, -\frac{1}{2} \nu - \frac{1}{2} \lambda \right) = \left( \frac{1}{2} \zeta \right)^\lambda J_{\nu+\lambda}(\zeta).$$

Aus (57) mit  $\alpha = \frac{1}{2} \nu + \lambda$  ergibt sich somit

$$J_\nu(z) = \frac{2^{1-\lambda} z^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_1^\infty J_{\nu+\lambda}(zu) (u^2-1)^{\lambda-1} u^{-\nu-\lambda+1} du; \quad (58)$$

hierin ist  $z > 0$ ,  $\Re(\nu) > -\frac{3}{2}$  und  $\lambda$  beliebig mit  $0 < \Re(\lambda) < \Re(\nu) + \frac{3}{2}$ .

Für  $\lambda = \frac{1}{2} - \nu$  bzw.  $\lambda = -\frac{1}{2} - \nu$  geht (58) wegen

$$J_{\frac{1}{2}}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi w}} \sin w, \quad J_{-\frac{1}{2}}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi w}} \cos w$$

in

$$J_\nu(z) = \frac{2^{1+\nu} z^{-\nu}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \nu) \sqrt{\pi}} \int_1^\infty \frac{\sin(zu) du}{(u^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}} \quad [z > 0, |\Re(\nu)| < \frac{1}{2}] \quad (59)$$

bzw.

$$J_\nu(z) = \frac{2^{2+\nu} z^{-\nu-1}}{\Gamma(-\frac{1}{2} - \nu) \sqrt{\pi}} \int_1^\infty \frac{\cos(zu) u du}{(u^2-1)^{\nu+1}} \quad [z > 0, -1 < \Re(\nu) < -\frac{1}{2}] \quad (60)$$

über.

Aus (7) und (36) geht hervor

$$\left. \begin{aligned} K_\nu(z) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^\infty G_{0,2}^{2,0} \left( \frac{1}{4} z^2 u^2 \mid \alpha, \beta \right) \\ &\times {}_2F_1 \left( \alpha - \frac{1}{2} \nu, \alpha + \frac{1}{2} \nu; \alpha + \beta; 1 - u^2 \right) (u^2 - 1)^{\alpha+\beta-1} u^{1-2\beta} du. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Für die hierin auftretende Funktion  $G_{0,2}^{2,0}(\frac{1}{4} z^2 u^2)$  gilt wegen (55) und (36)

$$G_{0,2}^{2,0} \left( \frac{1}{4} z^2 u^2 \mid \alpha, \beta \right) = 2 \left( \frac{1}{2} zu \right)^{\alpha+\beta} K_{\alpha-\beta}(zu);$$

die Funktion  $K_\nu(z)$  besitzt also wegen (61) die Integraldarstellung

$$\left. \begin{aligned} K_\nu(z) &= \frac{2^{1-\alpha-\beta} z^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^\infty K_{\alpha-\beta}(zu) \\ &\times {}_2F_1 \left( \alpha - \frac{1}{2} \nu, \alpha + \frac{1}{2} \nu; \alpha + \beta; 1 - u^2 \right) (u^2 - 1)^{\alpha+\beta-1} u^{\alpha-\beta+1} du. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

In dieser Beziehung ist  $z \neq 0$  und  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ ;  $\alpha$  und  $\beta$  sind beliebig mit <sup>19)</sup>  $\Re(\alpha + \beta) > 0$ .

Setzt man  $\alpha = \frac{1}{2}\nu + \lambda$  und  $\beta = -\frac{1}{2}\nu$  in (62), so erhält man

$$K_\nu(z) = \frac{2^{1-\lambda} z^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_1^\infty K_{\nu+\lambda}(zu) (u^2-1)^{\lambda-1} u^{-\nu-\lambda+1} du \quad [\Re(\lambda) > 0]. \quad (63)$$

Nun ist

$$K_{\pm \frac{1}{2}}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2w}} e^{-w} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (64)$$

Die zwei Spezialfälle von (63) mit  $\lambda = \frac{1}{2} - \nu$  bzw.  $\lambda = -\frac{1}{2} - \nu$  liefern daher

$$K_\nu(z) = \frac{2^\nu z^{-\nu} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} \int_1^\infty \frac{e^{-zu} du}{(u^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}} \quad [|\arg z| < \frac{1}{2}\pi, \Re(\nu) < \frac{1}{2}]. \quad (65)$$

bzw.

$$K_\nu(z) = \frac{2^{\nu+1} z^{-\nu-1} \sqrt{\pi}}{\Gamma(-\frac{1}{2} - \nu)} \int_1^\infty \frac{e^{-zu} u du}{(u^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}} \quad [|\arg z| < \frac{1}{2}\pi, \Re(\nu) < -\frac{1}{2}]. \quad (66)$$

Die Formeln (58), (63), (59), (60), (65) und (66) waren schon bekannt <sup>20)</sup>.

Nimmt man  $\alpha = \frac{1}{2}$  und  $\beta = \frac{1}{2} - \sigma$  in (62), so bekommt man

$$K_\nu(z) = \frac{2^\sigma z^{1-\sigma}}{\Gamma(1-\sigma)} \int_1^\infty K_\sigma(zu) \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu; 1 - \sigma; 1 - u^2\right) (u^2-1)^{-\sigma} u^{\sigma+1} du. \quad (67)$$

Nun ist

$${}_2F_1(-n, 1+n; 1-m; -\sinh^2 t) = \Gamma(1-m) \sinh^m t \cosh^{-m} t P_n^m(\cosh 2t), \quad (68)$$

wo  $P_n^m(w)$  die zugeordnete LEGENDRESche Funktion erster Art bezeichnet <sup>21)</sup>.

<sup>19)</sup> Die Bedingung  $\alpha - \beta$  nicht ganz kann in (62) durch Grenzübergang beseitigt werden.

<sup>20)</sup> WATSON, [17], 417, Formeln (5) und (6); 170, Formel (3); 172, Formel (4). Siehe auch NIELSEN, [16], 222–223. Für (60) und (66) vergl. man MAYR, [5], 230, Formel (3) und 232, Formel (7).

<sup>21)</sup> Die zugeordnete LEGENDRESche Funktion erster Art wird für  $w > 1$  definiert durch (HOBSON, [2], 188)

$$P_n^m(w) = \frac{(w+1)^{\frac{1}{2}m} (w-1)^{-\frac{1}{2}m}}{\Gamma(1-m)} {}_2F_1(-n, 1+n; 1-m; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}w);$$

setzt man hierin  $w = \cosh 2t$ , so bekommt man (68).



Aus (67) mit  $u = \cosh t$  folgt daher

$$K_\nu(z) = 2^\sigma z^{1-\sigma} \int_0^\infty K_\sigma(z \cosh t) P_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}^\sigma(\cosh 2t) \sinh^{1-\sigma} t \cosh t dt; \quad (69)$$

hierin ist  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$  und  $\sigma$  beliebig mit  $\Re(\sigma) < 1$ . Der Spezialfall mit  $\sigma = \frac{1}{2}$  liefert wegen <sup>22)</sup>

$$P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\cosh w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cosh n w}{\sinh^{\frac{1}{2}} w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

und (64) die bekannte Relation <sup>23)</sup>

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh \nu t dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Setzt man  $\beta = \alpha + \frac{1}{2}$  in (62), so findet man wegen (64)

$$\left. \begin{aligned} K_\nu(z) &= \frac{2^{-2\alpha} z^{2\alpha} \sqrt{\pi}}{\Gamma(2\alpha + \frac{1}{2})} \int_1^\infty e^{-zu} \\ &\times {}_2F_1\left(\alpha - \frac{1}{2}\nu, \alpha + \frac{1}{2}\nu; 2\alpha + \frac{1}{2}; 1-u^2\right) (u^2-1)^{2\alpha-\frac{1}{2}} du; \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

diese Beziehung geht für  $\alpha = -\frac{1}{2}\nu$  in (65) und für  $\alpha = -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$  in (66) über.

Nun gilt bekanntlich <sup>24)</sup>

$$\left. \begin{aligned} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}m, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}m; 1-m; -\sinh^2 t\right) \\ = 2^{-m} \Gamma(1-m) \sinh^m t P_n^m(\cosh t). \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Aus (72) mit  $u = \cosh t$  ergibt sich also

$$K_\nu(z) = 2^{-\frac{1}{2}} z^{2\alpha} \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-z \cosh t} P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-2\alpha}(\cosh t) \sinh^{2\alpha+\frac{1}{2}} t dt.$$

Diese Formel, gültig für  $\Re(\alpha) > -\frac{1}{4}$ , habe ich früher <sup>25)</sup> auf andere Weise abgeleitet; sie geht für  $\alpha = 0$  wegen (70) in (71) über.

<sup>22)</sup> HOBSON, [2], 286.

<sup>23)</sup> WATSON, [17], 181, Formel (5).

<sup>24)</sup> HOBSON, [2], 219, Formel (49).

<sup>25)</sup> MEIJER, [12], 1100, Formel (31) und 146, Formel (23). Siehe auch \*MACDONALD, [3], 437, Formel (16) und MACROBERT, [4], 701, Formel (12a).

**Mathematics.** — *Ueber die asymptotische Verteilung eines beliebigen Systems  $(f_v)$  von  $n$  reellen Funktionen  $f_v$  der  $m$  ganzzahligen Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_m$  modulo Eins.* Von J. F. KOKSMA.  
(Communicated by J. G. VAN DER CORPUT)

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

1. In der Theorie der asymptotischen Verteilung reeller Zahlfolgen modulo Eins<sup>1)</sup> stösst man auf die Frage, ob sich jede reelle Zahl  $a$  mit beliebiger Genauigkeit durch die Zahlen einer vorgegebenen Folge  $f(1), f(2), \dots$  modulo Eins annähern lässt. Liegt dieser Fall vor, so erhebt sich die Aufgabe, wenn möglich eine (von  $a$  unabhängige) positive, mit wachsendem  $x$  gegen die Null strebende Funktion  $\varphi(x)$  des ganzzahligen Arguments  $x \geq 1$  derart zu bestimmen, dass für jedes reelle  $a$  das Diophantische Ungleichungssystem

$$-\varphi(x) < f(x) - a < \varphi(x) \pmod{1} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen  $x \geq 1$  hat ( $x$  heisst eine Lösung des Systems (1), falls es zu diesem  $x$  ein ganzes  $y$  mit

$$-\varphi(x) < f(x) - y - a < \varphi(x)$$

gibt).

Sobald eine derartige „Approximationsfunktion“  $\varphi(x)$  bestimmt worden ist, fragt es sich, ob sich das Ergebnis verschärfen lässt, das heisst, ob sich  $\varphi(x)$  durch eine schneller gegen die Null strebende Approximationsfunktion ersetzen lässt.

Wenn man umgekehrt von einer gegebenen Funktion  $\varphi(x)$  ausgeht, stösst man in diesem Problemgebiet auf Fragen wie die folgende: gibt es eine spezielle Folge  $f(1), f(2), \dots$  für die die Funktion  $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$  die obenverlangte Eigenschaft besitzt?

Der hier zu beweisende Satz 1 gibt auf die zuletztgestellte Frage eine verneinende Antwort; er beansprucht mit Hinsicht auf die ihr vorangehenden Fragen einiges Interesse, weil er für die Ordnung des Verschwindens der obenverlangten Approximationsfunktion  $\varphi(x)$  eine Beschränkung nach oben liefert, die für keine Folge  $f(1), f(2), \dots$  überschritten werden kann.

1) Literatur in meinem Bericht „Diophantische Approximationen“. Ergebnisse d. Math. IV, 4 (Berlin 1936), speziell Kap. VIII f.f.

**Satz 1.** Sei  $f(1), f(2), \dots$  eine beliebige Folge reeller Zahlen. Ist dann  $\varphi(1), \varphi(2), \dots$  eine Folge positiver Zahlen für die die Reihe

$$\sum_{x=1}^{\infty} \varphi(x)$$

konvergiert, so hat das Diophantische System

$$- \varphi(x) \leq f(x) - a \leq \varphi(x) \pmod{1}$$

für fast alle  $a$  höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen  $x \equiv 1$ .

**Bemerkung:** „Fast alle“ bedeutet, dass die Menge der Ausnahmehalten  $a$  auf der Zahlengeraden das LEBESGUESCHE Linienmass Null hat.

2. Ich zeige Satz 1 als Anwendung des allgemeineren Satzes 2, dessen Beweis das Ziel dieser Note bildet<sup>2)</sup>.

**Satz 2. Voraussetzungen.** Es seien  $m, n$  und  $r$  natürliche Zahlen,  $\mathfrak{N}$  eine Menge von Gitterpunkten  $X = (x_1, \dots, x_m)$  im  $R_m$  und

$$\mathfrak{Q} \dots A_v \leq u_v \leq B_v \quad (A_v < B_v; v = 1, 2, \dots, n)$$

ein Quader im  $R_n$ . Ferner seien

$$F_v(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_r) \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

$n$  reelle Funktionen, die für jedes Gitterpunktpaar  $X \equiv (x_1, \dots, x_m)$  (beliebig aus  $\mathfrak{N}$ ) und  $Y \equiv (y_1, \dots, y_r)$  (beliebig aus  $R_r$ ) definiert sind. Schliesslich seien  $\varphi_v(x) > 0$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) und  $K(x) \equiv 0$   $n+1$  für jedes ganze  $x \equiv 1$  definierte Funktionen, derart dass die beiden Reihen

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{x=1}^{\infty} x^{m-1} \text{Max} \left( \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x) \right) \\ & \text{und} \\ & \sum_{x=1}^{\infty} x^{m-1} K(x) \varphi_1(x) \dots \varphi_n(x) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

konvergieren, und es gelte die Eigenschaft, dass für jeden Gitterpunkt  $X$  der Höhe  $x = \text{Max}(|x_1|, \dots, |x_m|) \equiv 1$  aus  $\mathfrak{N}$ , höchstens  $K(x)$  Gitterpunkte  $Y$  im  $R_r$  existieren, für die der Punkt  $P \equiv P(x, y) \equiv (p_1, \dots, p_n)$  mit Koordinaten

$$p_v = F_v(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_r) \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

im Innern des Quaders  $\mathfrak{Q}$  liegt.

**Behauptung.** Zu fast allen Punkten  $A \equiv (a_1, \dots, a_n)$  des Quaders

<sup>2)</sup> Vgl. zu Satz 1 auch den verwandten Satz 1 meiner Note: „Metrisches über die Approximation reeller Zahlen“. (Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, **41**, (1938), 45–47), der, wie der Leser leicht nachweist, ebenfalls in Satz 2 enthalten ist.

$\mathfrak{Q}$  gibt es höchstens endlich viele Gitterpunkte  $X$  in  $\mathfrak{N}$ , bei denen sich ein Gitterpunkt  $Y$  im  $R_r$  finden lässt, so dass die Ungleichungen

$$-\varphi_\nu(x) \leq F_\nu(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_r) - a_\nu \leq \varphi_\nu(x) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

wo  $x$  die Höhe des Gitterpunktes  $X$  bedeutet, sämtlich erfüllt sind.

**Bemerkungen.** 1. "Fast alle" bedeutet, dass die Menge der Ausnahmepunkte  $A \equiv (a_1, \dots, a_n)$  im  $R_n$  das LEBESGUESCHE Mass Null hat.

2. Vergleiche zu Satz 2 die „Aufgabe B" auf S. 4 meines in Fussnote <sup>1)</sup> zitierten Berichtes „Diophantische Approximationen".

3. Um einzusehen, dass Satz 1 in Satz 2 enthalten ist, setze man in Satz 2:

$m = n = r = 1$ ,  $x_1 = x$ ,  $y_1 = y$ ,  $\mathfrak{N}$  gleich der Folge  $x = 1, 2, 3, \dots$  ferner  $A_1 = 0$ ,  $B_1 = 1$ , d.h.  $\mathfrak{Q}$  gleich dem Einheitsintervall  $0 \leq u \leq 1$ ,  $F_1 = f(x) - y$ ,  $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ , und  $K(x) = 1$ .

4. Setzt man (für  $m \geq 1$ ,  $n = r \geq 1$ ):  
 $A_\nu = 0$ ,  $B_\nu = 1$  (also  $\mathfrak{Q}$  gleich dem Einheitswürfel im  $R_n$ ),

$F_\nu(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_r) = f_\nu(x_1, \dots, x_m) - y_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) und  $K(x) = 1$ ,

so erhält man das „mehrdimensionale" Analogon des Satzes 1 für das in der Ueberschrift genannte Funktionensystem  $(f_\nu)$ .

**Beweis von Satz 2.** Sei  $X$  ein beliebiger Gitterpunkt aus  $\mathfrak{N}$  mit Höhe  $x \geq 1$ . Sei  $A \equiv (a_1, \dots, a_n)$  ein Punkt aus  $\mathfrak{Q}$  mit der Eigenschaft, dass bei dem gegebenen Gitterpunkt  $X$  und einem gewissen Gitterpunkt  $Y$  die sämtlichen Ungleichungen (3) erfüllt sind. Dann gehört also  $A$  dem Quader

$$p_\nu - \varphi_\nu(x) \leq u_\nu \leq p_\nu + \varphi_\nu(x) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

mit Mittelpunkt  $P \equiv P(x, y)$  an.

Es gibt zwei Fälle.

1)  $P \equiv P(x, y)$  liegt im Innern des Quaders  $\mathfrak{Q}$ . Dieser Fall kann nach den Voraussetzungen des Satzes 2 für höchstens  $K(x)$  Gitterpunkte  $Y$  auftreten.

2)  $P \equiv P(x, y)$  liegt ausserhalb des Quaders  $\mathfrak{Q}$ , oder auf dem Rande. Dann aber liegt  $A$  in wenigstens einer der  $2n$  Schichten

$$A_\nu \leq u_\nu \leq A_\nu + \varphi_\nu(x), \text{ bzw. } B_\nu - \varphi_\nu(x) \leq u_\nu \leq B_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

der Maximaldicke

$$\text{Max } (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)).$$

Also: die Menge  $\mathfrak{M}(X)$  sämtlicher Punkte  $A$  in  $\mathfrak{Q}$  für die das Ungleichungssystem (3) bei irgend einem Gitterpunkt  $Y$  gilt, hat das äussere Mass

$$\overline{\text{m}} \mathfrak{M}(X) \leq K(x) \prod_{\nu=1}^n (2 \varphi_\nu(x)) + C \text{Max } (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)),$$

wo  $C$  eine positive, nur von der Wahl des Quaders  $\mathfrak{Q}$  abhängige Konstante bedeutet.

Also auch: die Menge  $\mathfrak{M}'(x)$  sämtlicher Punkte  $A$  in  $\mathfrak{Q}$ , für die bei irgend einem Gitterpunkt  $X$  der Höhe  $x \equiv 1$  aus  $\mathfrak{N}$  und irgend einem Gitterpunkt  $Y$  aus  $R_r$  die sämtlichen Ungleichungen (3) gelten, hat das äussere Mass

$$\begin{aligned} \overline{m} \mathfrak{M}'(x) &\leq 2m(2x+1)^{m-1} \left\{ 2^n K(x) \prod_{r=1}^n \varphi_r(x) + C \operatorname{Max}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \right\} \\ &\leq m \cdot 3^{m+n} \cdot x^{m-1} K(x) \prod_{r=1}^n \varphi_r(x) + m \cdot 3^m \cdot C \cdot x^{m-1} \operatorname{Max}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)). \end{aligned}$$

Wegen der Konvergenz der Reihen (2) konvergiert also die Reihe

$$\sum_{x=1}^{\infty} \overline{m} \mathfrak{M}'(x),$$

so dass fast alle  $A$  aus  $\mathfrak{Q}$  höchstens einer endlichen Anzahl der Mengen  $\mathfrak{M}'(x)$  angehören. Q.e.d.





easily proved (as in the case of single series), that convergence implies summability  $(C; t, r)$ , if  $t$  and  $r$  are  $\geq 0$  ("theorem of consistency").

For any function  $u_{m,n}$  of the two positive integral variables  $m$  and  $n$  (which are written as lower indices) let

$$D_h u_{m,n} = u_{m+h,n} - u_{m,n} \quad \text{and} \quad \Delta_k u_{m,n} = u_{m,n+k} - u_{m,n}$$

be the differences of  $u_{m,n}$  with respect to the first and second variable respectively, if  $h$  and  $k$  are positive integers. If however  $-h$  and  $-k$  are negative integers, we write

$$D_{-h} u_{m,n} = u_{m,n} - u_{m-h,n} \quad \text{and} \quad \Delta_{-k} u_{m,n} = u_{m,n} - u_{m,n-k} \quad (h < m; k < n).$$

The higher differences are defined in the usual way. Thus, if  $t$  and  $r$  are positive integers and  $h > 0, k > 0$ :

$$D_h^t u_{m,n} = D_h(D_h^{t-1} u_{m,n}) = \sum_{\tau=0}^t (-1)^\tau \binom{t}{\tau} u_{m+(t-\tau)h, n},$$

$$\Delta_k^r u_{m,n} = \Delta_k(\Delta_k^{r-1} u_{m,n}) = \sum_{\varrho=0}^r (-1)^\varrho \binom{r}{\varrho} u_{m, n+(r-\varrho)k}$$

and

$$D_h^t \Delta_k^r u_{m,n} = \sum_{\tau=0}^t \sum_{\varrho=0}^r (-1)^{\tau+\varrho} \binom{t}{\tau} \binom{r}{\varrho} u_{m+(t-\tau)h, n+(r-\varrho)k}. \quad (3)$$

Also, if  $-h$  and  $-k$  are negative integers:

$$D_{-h}^t u_{m,n} = D_{-h}(D_{-h}^{t-1} u_{m,n}) = \sum_{\tau=0}^t (-1)^\tau \binom{t}{\tau} u_{m-\tau h, n},$$

$$\Delta_{-k}^r u_{m,n} = \Delta_{-k}(\Delta_{-k}^{r-1} u_{m,n}) = \sum_{\varrho=0}^r (-1)^\varrho \binom{r}{\varrho} u_{m, n-\varrho k}$$

and

$$D_{-h}^t \Delta_{-k}^r u_{m,n} = \sum_{\tau=0}^t \sum_{\varrho=0}^r (-1)^{\tau+\varrho} \binom{t}{\tau} \binom{r}{\varrho} u_{m-\tau h, n-\varrho k}. \quad (4)$$

Clearly the symbols  $D$  and  $\Delta$  are commutative.

*Lemma 1.* If  $m, n, h, k, t, r$  are positive integers, then

$$\begin{aligned} D_h^t \Delta_k^r s_{m,n}^{(t,r)} &= h^t k^r s_{m,n}^{(0,0)} + k \sum_{\omega=1}^h (h-\omega+1) \sum_{\tau=0}^{t-1} h^{t-\tau-1} D_h^\tau \Delta_k^{r-1} s_{m+\omega, n}^{(\tau-1, r-1)} + \\ &+ \sum_{\varkappa=1}^k (k-\varkappa+1) D_h^t \Delta_k^{r-1} s_{m, n+\varkappa}^{(t, r-2)} + h^t \sum_{\varkappa=1}^k (k-\varkappa+1) \sum_{\varrho=0}^{r-2} k^{r-\varrho-1} \Delta_k^\varrho s_{m, n+\varkappa}^{(0, \varrho-1)} \end{aligned}$$

(where  $\sum_{\varrho=0}^{r-2}$  means 0, if  $r=1$ ).

*Proof.* If  $m, n, \omega, \varkappa$  are positive integers, we have

$$s_{m+\omega, n+\varkappa}^{(0,0)} = s_{m+\omega, n}^{(0,0)} + \sum_{\lambda=1}^{\varkappa} s_{m+\omega, n+\lambda}^{(0,-1)}.$$

Summing over  $\varkappa$  from 1 to  $k$ , we get

$$\triangle_k s_{m+\omega, n}^{(0,1)} = k s_{m+\omega, n}^{(0,0)} + \sum_{\varkappa=1}^k (k-\varkappa+1) s_{m+\omega, n+\varkappa}^{(0,-1)} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Now summing over  $\omega$  from 1 to  $h$ , we get

$$D_h \triangle_k s_{m, n}^{(1,1)} = k D_h s_{m, n}^{(1,0)} + \sum_{\varkappa=1}^k (k-\varkappa+1) D_h s_{m, n+\varkappa}^{(1,-1)} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

We have also

$$s_{m+\omega, n}^{(0,0)} = s_{m, n}^{(0,0)} + \sum_{\lambda=1}^{\omega} s_{m+\lambda, n}^{(-1,0)}.$$

Summing over  $\omega$  from 1 to  $h$ , we get

$$D_h s_{m, n}^{(1,0)} = h s_{m, n}^{(0,0)} + \sum_{\omega=1}^h (h-\omega+1) s_{m+\omega, n}^{(-1,0)} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

If we substitute this result in (6), we get

$$D_h \triangle_k s_{m, n}^{(1,1)} = h k s_{m, n}^{(0,0)} + k \sum_{\omega=1}^h (h-\omega+1) s_{m+\omega, n}^{(-1,0)} + \sum_{\varkappa=1}^k (k-\varkappa+1) D_h s_{m, n+\varkappa}^{(1,-1)}$$

and thus the lemma is proved in the special case  $t=r=1$ .

We now apply induction with respect to  $t$ , in order to prove the lemma in the case  $r=1$ . Suppose that for some integer  $t \geq 1$  the formula

$$D_h^t \triangle_k s_{m, n}^{(t,1)} = h^t k s_{m, n}^{(0,0)} + k \sum_{\omega=1}^h (h-\omega+1) \sum_{\tau=0}^{t-1} h^{t-\tau-1} D_h^{\tau} s_{m+\omega, n}^{(\tau-1,0)} + \left\{ \begin{array}{l} + \sum_{\varkappa=1}^k (k-\varkappa+1) D_h^t s_{m, n+\varkappa}^{(t,-1)} \end{array} \right\} \quad (8)$$

is already proved. We then replace  $m$  by  $m+\lambda$  and sum over  $\lambda$  from 1 to  $h$ . We then get:

$$D_h^{t+1} \triangle_k s_{m, n}^{(t+1,1)} = h^t k D_h s_{m, n}^{(1,0)} + \left\{ \begin{array}{l} + k \sum_{\omega=1}^h (h-\omega+1) \sum_{\tau=0}^{t-1} h^{t-\tau-1} D_h^{\tau+1} s_{m+\omega, n}^{(\tau,0)} + \sum_{\varkappa=1}^k (k-\varkappa+1) D_h^{t+1} s_{m, n+\varkappa}^{(t+1,-1)} \end{array} \right\} \quad (9)$$

Hence, substituting (7) in (9):

$$\begin{aligned}
 D_h^{t+1} \triangle_k s_{m,n}^{(t+1,1)} &= h^{t+1} k s_{m,n}^{(0,0)} + k \sum_{\omega=1}^h (h-\omega+1) h^t s_{m+\omega,n}^{(-1,0)} + \\
 &+ k \sum_{\omega=1}^h (h-\omega+1) \sum_{\tau=1}^t h^{t-\tau} D_h^\tau s_{m+\omega,n}^{(\tau-1,0)} + \sum_{\varkappa=1}^k (k-\varkappa+1) D_h^{t+1} s_{m,n+\varkappa}^{(t+1,-1)} = \\
 &= h^{t+1} k s_{m,n}^{(0,0)} + k \sum_{\omega=1}^h (h-\omega+1) \sum_{\tau=0}^t h^{t-\tau} D_h^\tau s_{m+\omega,n}^{(\tau-1,0)} + \\
 &+ \sum_{\varkappa=1}^k (k-\varkappa+1) D_h^{t+1} s_{m,n+\varkappa}^{(t+1,-1)}.
 \end{aligned}$$

Thus the induction from  $t$  to  $t+1$  is achieved and therefore (8) is proved for all integral values  $\geq 1$  of  $t$ . This is the special case  $r=1$  of the statement of the lemma. We now apply induction with respect to  $r$ , in order to prove the lemma for all integral  $r \geq 1$ . We then replace  $n$  by  $n+\lambda$  and sum over  $\lambda$  from 1 to  $k$ . Then it follows, that

$$\begin{aligned}
 D_h^t \triangle_k^{r+1} s_{m,n}^{(t,r+1)} &= h^t k^r \triangle_k s_{m,n}^{(0,1)} + \\
 &+ k \sum_{\omega=1}^h (h-\omega+1) \sum_{\tau=0}^{t-1} h^{t-\tau-1} D_h^\tau \triangle_k^r s_{m+\omega,n}^{(\tau-1,r)} + \\
 &+ \sum_{\varkappa=1}^k (k-\varkappa+1) D_h^t \triangle_k^r s_{m,n+\varkappa}^{(t,r-1)} + h^t \sum_{\varkappa=1}^k (k-\varkappa+1) \sum_{\varrho=0}^{r-2} k^{r-\varrho-1} \triangle_k^{\varrho+1} s_{m,n+\varkappa}^{(0,\varrho)}.
 \end{aligned} \quad (10)$$

We now substitute (5) (with  $\omega=0$ ) in (10) and then get:

$$\begin{aligned}
 D_h^t \triangle_k^{r+1} s_{m,n}^{(t,r+1)} &= h^t k^{r+1} s_{m,n}^{(0,0)} + \\
 &+ k \sum_{\omega=1}^h (h-\omega+1) \sum_{\tau=0}^{t-1} h^{t-\tau-1} D_h^\tau \triangle_k^r s_{m+\omega,n}^{(\tau-1,r)} + \sum_{\varkappa=1}^k (k-\varkappa+1) D_h^t \triangle_k^r s_{m,n+\varkappa}^{(t,r-1)} + \\
 &+ h^t \sum_{\varkappa=1}^k (k-\varkappa+1) \sum_{\varrho=0}^{r-1} k^{r-\varrho} \triangle_k^\varrho s_{m,n+\varkappa}^{(0,\varrho-1)}.
 \end{aligned}$$

Thus the induction from  $r$  to  $r+1$  is achieved and lemma 1 is completely proved.

*Lemma 2.* If  $m, n, h, k, t, r$  are positive integers and  $m > th, n > rk$ , then

$$\begin{aligned}
 D_{-h}^t \triangle_{-k}^r s_{m,n}^{(t,r)} &= h^t k^r s_{m,n}^{(0,0)} - k \sum_{\omega=0}^{h-1} (h-\omega-1) \sum_{\tau=0}^{t-1} h^{t-\tau-1} D_{-h}^\tau \triangle_{-k}^{r-1} s_{m-\omega,n}^{(\tau-1,r-1)} + \\
 &- \sum_{\varkappa=0}^{k-1} (k-\varkappa-1) D_{-h}^t \triangle_{-k}^{r-1} s_{m,n-\varkappa}^{(t,r-2)} - h^t \sum_{\varkappa=0}^{k-1} (k-\varkappa-1) \sum_{\varrho=0}^{r-2} k^{r-\varrho-1} \triangle_{-k}^\varrho s_{m,n-\varkappa}^{(0,\varrho-1)}
 \end{aligned}$$

(where  $\sum_{\omega=0}^{r-2}$  means 0, if  $r=1$ ).

*Proof.* Starting from the formulae

$$\Delta_{-k} s_{m-\omega, n}^{(0,1)} = k s_{m-\omega, n}^{(0,0)} - \sum_{\omega=0}^{k-1} (k-\omega-1) s_{m-\omega, n-\omega}^{(0,-1)}$$

and

$$D_{-h} s_{m, n}^{(1,0)} = h s_{m, n}^{(0,0)} - \sum_{\omega=0}^{h-1} (h-\omega-1) s_{m-\omega, n}^{(-1,0)}$$

instead of (5) and (7), the proof is very much like the proof of lemma 1 and it may therefore be left to the reader.

*Lemma 3.* Suppose, that the inequalities

$$s_{m, n}^{(0,-1)} < \frac{K}{n} \quad , \quad s_{m, n}^{(-1,0)} < \frac{K}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

are valid for all positive integers  $m$  and  $n$ . Here  $K$  is a positive constant, independant of  $m$  and  $n$ . Then if  $h \geq 1$ ,  $k \geq 1$ ,  $r \geq 0$ ,  $t \geq 0$  are integers, we have

$$D_h^t \Delta_k^r s_{m, n}^{(t, r-1)} < K \frac{h^t k^r}{n} \quad , \quad D_h^t \Delta_k^r s_{m, n}^{(t-1, r)} < K \frac{h^t k^r}{m} \quad . \quad (12)$$

If, in addition  $m > th$  and  $n > rk$ , then

$$D_{-h}^t \Delta_{-k}^r s_{m, n}^{(t, r-1)} < K \frac{h^t k^r}{n-rk} \quad , \quad D_{-h}^t \Delta_{-k}^r s_{m, n}^{(t-1, r)} < K \frac{h^t k^r}{m-th} \quad . \quad (13)$$

*Proof.* If  $t=r=0$  the first inequality (12) is true, since it then is identical with the first inequality (11). Suppose it to be true for  $r=0$  and some integer  $t \geq 0$ . Then

$$D_h^t s_{m, n}^{(t,-1)} < K \frac{h^t}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

If we replace  $m$  by  $m + \omega$  and sum over  $\omega$  from 1 to  $h$ , we get

$$D_h^{t+1} s_{m, n}^{(t+1,-1)} = \sum_{\omega=1}^h D_h^t s_{m+\omega, n}^{(t,-1)} < K \sum_{\omega=1}^h \frac{h^t}{n} = K \frac{h^{t+1}}{n}.$$

Therefore, by induction, the inequality (14) is true for any integer  $t \geq 0$ . Again, suppose, that the first inequality (12) is true for all integers  $t \geq 0$  and some integer  $r \geq 0$ . Then, replacing  $n$  by  $n + \omega$  and summing over  $\omega$  from 1 to  $k$ , we get

$$D_h^t \Delta_k^{r+1} s_{m, n}^{(t, r)} = \sum_{\omega=1}^k D_h^t \Delta_k^r s_{m, n+\omega}^{(t, r-1)} < K \sum_{\omega=1}^k \frac{h^t k^r}{n+\omega} < K \frac{h^t k^{r+1}}{n}.$$



Thus the first inequality (12) is proved by induction. The second inequality (12) and the inequalities (13) can be proved in the same way.

*Theorem 1.* Let the double series (1) be summable  $(C; t, r)$  to the sum  $s$ , where  $t$  and  $r$  are positive integers. Then if

$$s_{m,n}^{(0,-1)} < \frac{K}{n} \quad , \quad s_{m,n}^{(-1,0)} < \frac{K}{m}$$

for all positive integers  $m, n$ , where  $K$  is a positive constant, independent of  $m$  and  $n$ , then the double series is convergent with the sum  $s$ .

*Proof.* Let first  $s = 0$ . Then it follows from

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{s_{m,n}^{(t,r)}}{\binom{m+t-1}{t} \cdot \binom{n+r-1}{r}} = 0,$$

that also

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{s_{m,n}^{(t,r)}}{m^t n^r} = 0.$$

Therefore,  $\varepsilon$  being a positive number, we have

$$s_{m,n}^{(t,r)} < \varepsilon m^t n^r \quad (m \geq N(\varepsilon), n \geq N(\varepsilon)). \quad (15)$$

Now let  $h$  and  $k$  be positive integers, such that

$$h < \frac{m}{2t} \quad , \quad k < \frac{n}{2r}. \quad (16)$$

From (3), (15) and (16) it follows that

$$\left| D_h^t \triangle_k^r s_{m,n}^{(t,r)} \right| < \varepsilon \sum_{\tau=0}^t \sum_{\varrho=0}^r \binom{t}{\tau} \binom{r}{\varrho} (m+th)^\tau (n+rk)^\varrho < 2^{t+r} m^t n^r \varepsilon \sum_{\tau=0}^t \sum_{\varrho=0}^r \binom{t}{\tau} \binom{r}{\varrho} = 2^{2t+2r} m^t n^r \varepsilon \quad (m \geq N, n \geq N) \quad (17)$$

In the same way (4) and (15) give

$$\left| D_{-h}^t \triangle_{-k}^r s_{m,n}^{(t,r)} \right| \leq m^t n^r \varepsilon \sum_{\tau=0}^t \sum_{\varrho=0}^r \binom{t}{\tau} \binom{r}{\varrho} = 2^{t+r} m^t n^r \varepsilon \quad (18)$$

Using the inequality (17) and lemma 3 it now follows from lemma 1, that for  $m \geq N, n \geq N$ :

$$\begin{aligned} h^t k^r s_{m,n}^{(0,0)} &> -2^{2t+2r} m^t n^r \varepsilon - k \sum_{\alpha=1}^h h^\alpha \sum_{\tau=0}^{t-1} h^{t-\tau-1} \cdot K \frac{h^\tau \cdot k^{r-1}}{m} + \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^k k^\alpha \cdot K \frac{h^t k^{r-1}}{n} - h^t \sum_{\alpha=1}^k k^\alpha \sum_{\varrho=0}^{r-2} k^{r-\varrho-1} \cdot K \frac{k^\varrho}{n}. \end{aligned}$$

Hence

$$h^t k^r s_{m,n}^{(0,0)} > -2^{2t+2r} m^t n^r \varepsilon - K t \frac{h^{t+1} k^r}{m} - K r \frac{h^t k^{r+1}}{n} \quad (m \geq N, n \geq N). \quad (19)$$

We now choose

$$h = \left[ \frac{1}{\varepsilon^{4t}} m \right] + 1, \quad k = \left[ \frac{1}{\varepsilon^{4r}} n \right] + 1. \quad (20)$$

Then, if  $m$  and  $n$  are sufficiently large ( $m \geq N_1$ ,  $n \geq N_1$ ) we have  $h \geq 2$ ,  $k \geq 2$  and

$$\frac{1}{\varepsilon^{4t}} m < h \leq 2 \frac{1}{\varepsilon^{4t}} m, \quad \frac{1}{\varepsilon^{4r}} n < k \leq 2 \frac{1}{\varepsilon^{4r}} n.$$

Also, if  $\varepsilon$  is sufficiently small, the conditions (16) are satisfied and it now follows from (19), that

$$s_{m,n}^{(0,0)} > -2^{2t+2r} \varepsilon^{\frac{1}{2}} - 2 K t \varepsilon^{\frac{1}{4t}} - 2 K r \varepsilon^{\frac{1}{4r}} \quad (m \geq N_1, n \geq N_1).$$

Therefore, since  $\varepsilon$  is arbitrary, if  $\eta$  is a given positive number, we have

$$s_{m,n}^{(0,0)} > -\eta \quad (m \geq N_2(\eta), n \geq N_2(\eta)). \quad (21)$$

In the same way, using the inequality (18) and lemma 3, it follows from lemma 2, that for  $m \geq 2N$ ,  $n \geq 2N$  (then  $m - ht > \frac{1}{2}m \geq N$  and  $n - kr > \frac{1}{2}n \geq N$ ) we have

$$\begin{aligned} h^t k^r s_{m,n}^{(0,0)} &< 2^{t+r} m^t n^r \varepsilon + k \sum_{\omega=0}^{h-1} h \sum_{\tau=0}^{t-1} h^{t-\tau-1} \cdot K \frac{h^\tau k^{r-1}}{m-\omega-\tau h} + \\ &+ \sum_{\varkappa=0}^{k-1} k \cdot K \frac{h^t k^{r-1}}{n-\varkappa-(r-1)k} + h^t \sum_{\varkappa=0}^{k-1} k \sum_{\varrho=0}^{r-2} k^{r-\varrho-1} \cdot K \frac{k^\varrho}{n-\varkappa-\varrho k}. \end{aligned}$$

Hence

$$h^t k^r s_{m,n}^{(0,0)} < 2^{t+r} m^t n^r \varepsilon + 2 K t \frac{h^{t+1} k^r}{m} + 2 K r \frac{h^t k^{r+1}}{n} \quad (m \geq 2N, n \geq 2N).$$

With the same choice (20) of  $h$  and  $k$ , we find

$$s_{m,n}^{(0,0)} < 2^{t+r} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + 4 K t \varepsilon^{\frac{1}{4t}} + 4 K r \varepsilon^{\frac{1}{4r}} < \eta \quad (m \geq N_3(\eta); n \geq N_3(\eta)), \quad (22)$$

since  $\varepsilon$  is arbitrary.

From (21) and (22) it now follows, that

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} s_{m,n}^{(0,0)} = 0,$$

which proves theorem 1, if  $s = 0$ .



respectively. These theorems are also true for double series with complex coefficients, if the conditions (11) and (23) are replaced by

$$|s_{m,n}^{(0,-1)}| < \frac{K}{n} \quad , \quad |s_{m,n}^{(-1,0)}| < \frac{K}{m}$$

and

$$|a_{m,n}| < \frac{K}{m^2 + n^2}$$

respectively. In order to prove this, it is sufficient, to apply the theorems already proved to the series of the real and imaginary parts.

**Mathematics.** — *Développements en série de polynomes d'HERMITE et de LAGUERRE à l'aide des transformations de GAUSS et de HANKEL.*  
I. Par ERVIN FELDHEIM. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

*Introduction.*

Dans une Note précédente<sup>1)</sup>, nous avons considéré certains développements de produits de polynomes de LAGUERRE et d'HERMITE en séries de ces mêmes polynomes, et de représentations-intégrales fournies par les transformations de GAUSS et de HANKEL.

Dans le présent Mémoire, nous poursuivrons ce même sujet, en établissant d'une part de nouveaux développements et de nouvelles formules pour l'intégrale de tels produits, et d'autre part, en donnant des généralisations de résultats établis antérieurement.

Nous commençons par les notions qui sont indispensables pour nos recherches, en réduisant au minimum les résultats préliminaires cités, et négligeant toute formule qui ne trouvera son application plus tard. Pour ne pas interrompre à chaque pas le cours de nos raisonnements par le rappel de formules établies préalablement, nous avons jugé plus utile et plus commode de rassembler, dans un paragraphe séparé, ces résultats. C'est ce que contient le § 1.

§ 1. Généralités.

1<sup>0</sup>. Transformation de GAUSS et polynomes d'HERMITE.  
— La transformation de GAUSS est définie par l'équation fonctionnelle

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{a}} F(y) dy = f(x) = G_x^{(a)} [F(y)] \quad (Ra > 0). \quad (1)$$

Cette transformation fait passer de la *fonction-objet*  $F(y)$  à la *fonction-résultat*  $f(x)$ . Nous ne rappelons ici que deux propriétés essentielles de cette transformation<sup>2)</sup>:

<sup>1)</sup> FELDHEIM, [8] (Les nombres entre crochet renvoient à la Bibliographie placée à la fin du travail).

<sup>2)</sup> Pour ce qui est de la théorie générale et la bibliographie relative à ce sujet, voir TRICOMI [3].

a. la permutabilité avec la dérivation:

$$\frac{d}{dx} G_x^{(a)} [F(y)] = G_x^{(a)} \left[ \frac{dF(y)}{dy} \right]$$

b. l'homogénéité:

$$G_x^{(a)} [F(y)] = G_x^{(1)} [F(\sqrt{a} y)].$$

L'opération fonctionnelle représentée par l'équation intégrale (1) sera désignée dans la suite par le symbole  $G(a, x)$ : dire que nous appliquons à la fonction  $F(y)$  la transformation  $G(a, x)$ , veut dire que nous cherchons la fonction-résultat correspondant à l'aide de (1).

L'emploi de la transformation de GAUSS est particulièrement indiqué dans les cas où les fonctions qu'on rencontre sont des fonctions d'HERMITE ou sont exprimées par des séries de telles fonctions<sup>3)</sup>. Si nous considérons, en effet, la définition suivante

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(y) = e^{2ty - t^2} = e^{-(t-y)^2 + y^2} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

des polynômes d'HERMITE  $H_n(y)$ , nous voyons la ressemblance de forme entre le „noyau” de (1) (pour  $a=1$ ) et la „fonction génératrice” des fonctions d'HERMITE donnée par (2). Ce fait explique le rôle particulier que jouent les polynômes d'HERMITE dans la théorie de la transformation de GAUSS. La relation principale de cette théorie est<sup>4)</sup>:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{a}} H_n\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy = \left(1 - \frac{a}{\lambda^2}\right)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda^2 - a}}\right) \quad . \quad (3)$$

( $Ra > 0$ ,  $n$  entier positif ou nul,  $\lambda$  paramètre arbitraire) que l'on démontre très simplement en remplaçant, dans (2),  $y$  par  $\frac{y}{\lambda}$ , et appliquant la transformation  $G(a, x)$ .

D'autre part, de (2),

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda^n H_n\left(\frac{y}{\lambda}\right) &= e^{2ty - \lambda^2 t^2} = e^{2ty - t^2} \cdot e^{t^2(1 - \lambda^2)} = \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{t^\mu}{\mu!} H_\mu(y) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1 - \lambda^2)^\nu}{\nu!} t^{2\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \cdot \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (1 - \lambda^2)^\nu \frac{n! H_{n-2\nu}(y)}{\nu! (n - 2\nu)!} \end{aligned}$$

<sup>3)</sup> Voir p.e. TRICOMI [1].

<sup>4)</sup> Pour différentes démonstrations, applications et l'historique de cette relation, voir nos travaux cités dans la Bibliographie.



de sorte que nous avons „la relation de multiplication” <sup>5)</sup>

$$\lambda^n H_n \left( \frac{y}{\lambda} \right) = \sum_{\nu=0}^{\left[ \frac{n}{2} \right]} (1-\lambda^2)^\nu \frac{n!}{\nu!} \frac{H_{n-2\nu}(y)}{(n-2\nu)!} \quad . . . . (4)$$

En choisissant convenablement les paramètres  $a$  et  $\lambda$ , nous déduisons de (3) et (4) toutes les relations importantes et nécessaires pour notre objet. Commençons par (4). En observant que (comme il résulte sans peine de (2)),

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^n H_n \left( \frac{y}{\lambda} \right) = (2y)^n, \quad . . . . . (5)$$

(4) donne pour  $\lambda \rightarrow \infty$  et  $\lambda \rightarrow 0$  respectivement les deux développements „inverses” bien connus

$$H_n(y) = \sum_{\nu=0}^{\left[ \frac{n}{2} \right]} (-1)^\nu \frac{n!}{\nu!} \frac{(2y)^{n-2\nu}}{(n-2\nu)!} \quad (\lambda \rightarrow \infty), \quad . . . . (4a)$$

$$(2y)^n = \sum_{\nu=0}^{\left[ \frac{n}{2} \right]} \frac{n!}{\nu!} \frac{H_{n-2\nu}(y)}{(n-2\nu)!} \quad (\lambda \rightarrow 0), \quad . . . . . (4b)$$

Nous voyons que les coefficients des deux développements ne diffèrent que du facteur  $(-1)^\nu$ . Nous allons voir dans la suite que cette propriété est caractéristique aussi pour d'autres développements inverses.

Les cas particuliers importants de (3) sont les formules inverses:

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+ix)^2} (2iy)^n dy \quad (\lambda \rightarrow 0, a=1) \quad . . (3a)$$

$$(2x)^n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} H_n(y) dy \quad (\lambda=1, a=1) \quad . . (3b)$$

et l'équation

$$i^n H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-ix)^2}{2}} H_n(y) dy \quad (\lambda=1, a=2; i=\sqrt{-1}). \quad (3c)$$

On rencontre souvent, au lieu de (2), la définition suivante des polynomes d'HERMITE <sup>6)</sup>:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(y) = e^{ty - \frac{t^2}{2}} \quad . . . . . (6)$$

<sup>5)</sup> ERDÉLYI [1], FELDHEIM [5].

<sup>6)</sup> Nous désignerons ces polynomes, pour les distinguer de ceux introduits tout à l'heure, par  $H_n(y)$ .

En comparant les deux définitions (2) et (6), nous trouvons immédiatement que

$$\mathcal{H}_n(y) = 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right).$$

D'autre part, en posant  $\lambda = \sqrt{2}$  dans (4), nous aurons le développement de  $\mathcal{H}_n(y)$  en série des  $H_n(y)$ :

$$\mathcal{H}_n(y) = \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^\nu \frac{n!}{\nu!} \frac{H_{n-2\nu}(y)}{(n-2\nu)!} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (7)$$

Cette formule peut être considérée comme une sorte d'inversion de (4b). En effet, si nous appliquons à cette dernière relation la transformation  $G(2, ix)$ , nous retrouvons, en vertu de (3c), la formule (7).

Les polynômes  $H_n(y)$  sont exprimés à leurs tours à l'aide des  $\mathcal{H}_n(y)$  au moyen de

$$H_n(y) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \mathcal{H}_\nu(y) \mathcal{H}_{n-\nu}(y) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (8)$$

Nous verrons plus tard d'autres relations entre ces deux sortes de polynômes d'HERMITE.

2°. Transformation de HANKEL et polynômes de LAGUERRE. — On appelle „transformée de HANKEL” d'ordre  $\nu$  de la fonction  $F(y)$  la fonction  $f(x)$  définie par l'équation fonctionnelle

$$f(x) = \int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{xy}) F(y) dy \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (9)$$

Dans certaines conditions <sup>7)</sup>, on a la formule d'inversion

$$F(x) = \int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{xy}) f(y) dy \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (10)$$

Les polynômes de LAGUERRE  $L_n^{(\alpha)}(y)$ , tout comme les polynômes d'HERMITE pour la transformation de GAUSS, jouent ici un rôle particulier. Cela se voit immédiatement, si l'on définit ces polynômes à l'aide de la relation connue <sup>8)</sup>:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n L_n^{(a)}(y)}{L'(n+1)} = e^{ty} {}^a J_a(2\sqrt{ty}), \quad (R^a > -1) \quad (11)$$

<sup>7)</sup> TRICOMI [2], ou HOWELL [5].

<sup>8)</sup> TRICOMI, ERDÉLYI, FELDHEIM [6].

et l'on en déduit l'équation intégrale, analogue à (3), <sup>9)</sup>

$$\int_0^{\infty} J_{\alpha}(2\sqrt{xy}) e^{-y} y^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n \cdot e^{-x} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{1-\lambda}\right), (R\alpha > -1) \quad (12)$$

De la même façon, en remplaçant dans (11),  $t$  par  $\lambda t$  et  $y$  par  $\frac{y}{\lambda}$ , on aura

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} \lambda^n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{y}{\lambda}\right) &= e^t (ty)^{-\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(2\sqrt{ty}) \cdot e^{t(\lambda-1)} = \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{t^{\mu} L_{\mu}^{(\alpha)}(y)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{t^{\nu} (1-\lambda)^{\nu}}{\nu!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \cdot \sum_{\nu=0}^n (-1)^{\nu} (1-\lambda)^{\nu} \frac{L_{n-\nu}^{(\alpha)}(y)}{\nu! \Gamma(n-\nu+\alpha+1)}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\lambda^n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{y}{\lambda}\right) = \sum_{\nu=0}^n (\lambda-1)^{n-\nu} \binom{n+\alpha}{n-\nu} L_{\nu}^{(\alpha)}(y) \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

analogue à la relation (4) <sup>10)</sup>. On en déduit, en remarquant que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{y}{\lambda}\right) = (-1)^n \frac{y^n}{n!}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

les développements inverses

$$L_n^{(\alpha)}(y) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^{\nu} \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{y^{\nu}}{\nu!} \quad (\lambda \rightarrow \infty) \quad . \quad . \quad (13a)$$

$$\frac{y^n}{n!} = \sum_{\nu=0}^n (-1)^{\nu} \binom{n+\alpha}{n-\nu} L_{\nu}^{(\alpha)}(y) \quad (\lambda \rightarrow 0) \quad . \quad . \quad (13b)$$

Les formes particulières de (12) correspondantes sont

$$\int_0^{\infty} J_{\alpha}(2\sqrt{xy}) e^{-y} y^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(y) dy = \frac{1}{n!} e^{-x} x^{n+\frac{\alpha}{2}} \quad (R\alpha > -1, \lambda=1) \quad . \quad (12a)$$

$$\frac{1}{n!} \int_0^{\infty} J_{\alpha}(2\sqrt{xy}) e^{-y} y^{n+\frac{\alpha}{2}} dy = e^{-x} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) \quad (R\alpha > -1, \lambda \rightarrow 0) \quad (12b)$$

<sup>9)</sup> HOWELL [5], ERDÉLYI [4].

<sup>10)</sup> ERDÉLYI [1], [4], FELDHEIM [5].

Nous voyons donc que les fonctions  $e^{-y} y^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(y)$  et  $e^{-y} y^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{y^n}{n!}$  sont inverses à l'égard de la transformation de HANKEL.

Mentionnons encore l'équation intégrale de WILSON

$$\int_0^\infty J_\alpha(2\sqrt{xy}) e^{-y} y^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(2y) dy = (-1)^n e^{-x} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(2x). \quad (12c)$$

qui correspond, dans (12), à la valeur  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

Il faut encore rappeler la liaison entre les polynomes de LAGUERRE et d'HERMITE, à savoir

$$\begin{pmatrix} H_{2n}(y) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{(-\frac{1}{2})}(y^2) \\ H_{2n+1}(y) = (-1)^n 2^{2n+1} n! y L_n^{(\frac{1}{2})}(y^2) \end{pmatrix} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (15)$$

Il est d'ailleurs connu que les polynomes de LAGUERRE (et ainsi les polynomes d'HERMITE aussi) sont des cas spéciaux des fonctions de WHITTAKER <sup>11)</sup>.

30. Rappel de quelques résultats antérieurs. — L'étude des fonctions de WHITTAKER, et en particulier, celle des polynomes de LAGUERRE, a joui dans ces derniers temps d'un grand développement. Il est impossible d'indiquer ici tous les travaux se rattachant à ce genre de problèmes, et nous devons nous contenter de mentionner quelques Mémoires récents de MM. BAILEY, ERDÉLYI, HOWELL, MEIJER, TRICOMI, WATSON, et nous-mêmes.

Commençons par les résultats concernant les développements en séries des polynomes en question. Pour le produit de deux polynomes d'HERMITE de degrés différents, on a le développement <sup>12)</sup>:

$$H_m(y) H_n(y) = \sum_{\nu=0}^{\min(m,n)} 2^\nu \nu! \binom{m}{\nu} \binom{n}{\nu} H_{m+n-2\nu}(y) \quad (16)$$

pour le produit de polynomes de LAGUERRE, nous possédons le résultat moins simple, mais plus général <sup>13)</sup>:

$$L_{m_1}^{(\alpha_1)}(k_1 y) L_{m_2}^{(\alpha_2)}(k_2 y) \dots L_{m_n}^{(\alpha_n)}(k_n y) = \sum_{\nu=0}^{m_1+m_2+\dots+m_n} c_\nu L_\nu^{(\alpha)}(y), \quad (17)$$

<sup>11)</sup> Voir p.e. WHITTAKER-WATSON: A course of Modern Analysis. Cambridge (1927), les Notes de M. ERDÉLYI, et nombreuses Notes de M. C. S. MEIJER, parues dans les Proceedings of the Konink. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam.

<sup>12)</sup> FELDHEIM [2], WATSON [3]. La relation (16) a été déjà démontrée, sous une autre forme, par DHAR, Bull. Calcutta Math. Soc. 26, 57—64 (1934).

<sup>13)</sup> ERDÉLYI [3].

avec

$$c_i = \frac{(\alpha_1 + 1)_{m_1}}{m_1!} \dots \frac{(\alpha_n + 1)_{m_n}}{m_n!} \left. \vphantom{\frac{(\alpha_1 + 1)_{m_1}}{m_1!}} \right\} \quad (17')$$

$$F_A(\alpha + 1; -m_1, \dots, -m_n, -\nu; \alpha_1 + 1, \dots, \alpha_n + 1, \alpha + 1; k_1, k_2, \dots, k_n, 1)$$

où  $(p)_q = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)}$ , et  $F_A$  désigne ici une fonction hypergéométrique de LAURICELLA à  $n + 1$  variables.

Nous pouvons mentionner ici un autre résultat récent, exprimé par les formules <sup>14)</sup>:

$$L_m^{(\alpha)}(y) L_n^{(\beta)}(y) = \sum_{\nu=0}^{m+n} c_\nu(m, n; \alpha, \beta) L_\nu^{(\alpha+\beta)}(y) =$$

$$= (-1)^{m+n} \sum_{\nu=0}^{m+n} c_\nu(m, n; \beta - m + n, \alpha + m - n) \frac{y^\nu}{\nu!}. \quad (18)$$

Si l'on fait ici  $m = n$ , on trouve la propriété intéressante que les coefficients des deux développements sont égaux:

$$L_m^{(\alpha)}(y) L_m^{(\beta)}(y) = \sum_{\nu=0}^{2m} c_\nu L_\nu^{(\alpha+\beta)}(y) = \sum_{\nu=0}^{2m} c_\nu \frac{y^\nu}{\nu!}. \quad (18a)$$

En appliquant à (16) la transformation  $G(1, ix)$ , on obtient l'équation intégrale suivante <sup>15)</sup>:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-ix)^2} H_m(y) H_n(y) dy = 2^m n! (ix)^{m-n} L_n^{(m-n)}(2x^2) \quad (m \geq n). \quad (19)$$

Si  $m = n$ , on aura pour la transformée de FOURIER de  $e^{-y^2} H_n^2(y)$  (carré de la „fonction d'HERMITE”), l'expression digne d'intérêt:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} H_n^2(y) \cos 2xy dy = 2^n n! L_n(2x^2) \quad (19a)$$

Une généralisation de (19) est l'équation intégrale <sup>16)</sup>

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} H_m(y+x) H_n(y-z) dy = 2^m n! x^{m-n} L_n^{(m-n)}(2xz) \quad (m \geq n). \quad (20)$$

<sup>14)</sup> FELDHEIM [8]; le cas particulier  $\alpha = \beta$  de (18a) se trouve implicitement dans HOWELL [2].

<sup>15)</sup> HOWELL [2], FELDHEIM [8].

<sup>16)</sup> FELDHEIM [8].

L'inversion de (19) donne lieu à une représentation-intégrale du produit de deux polynômes d'HERMITE

$$H_m(x) H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^m n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+ix)^2} (iy)^{m-n} L_n^{(m-n)}(2y^2) dy \quad (m \geq n). \quad (21)$$

Appliquons maintenant à (18) la transformation de HANKEL à noyau  $e^{-y} y^{\frac{\alpha+\beta}{2}} J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{xy})$  nous retrouvons alors, à l'aide de (12a) et (12b), l'équation intégrale <sup>17)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{xy}) e^{-y} y^{\frac{\alpha+\beta}{2}} L_m^{(\alpha)}(y) L_n^{(\beta)}(y) dy = \\ = (-1)^{m+n} e^{-x} x^{\frac{\alpha+\beta}{2}} L_m^{(\beta-m+n)}(x) L_n^{(\alpha+m-n)}(x) \quad (R(\alpha+\beta) > -1). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Nous devons nous arrêter ici dans l'énumération des résultats établis jusqu'à présent dans cet ordre de problèmes. Aussi nous avons dû nous borner aux résultats seuls qui nous serviront dans ce qui va suivre. Une telle formule est encore la suivante

$$\int_0^{\infty} J_{\alpha}(2\sqrt{xy}) e^{-y} y^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\beta)}(y) dy = (-1)^n e^{-x} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha-\beta-n)}(x) \quad (R\alpha > -1) \quad (22a)$$

qui se déduit facilement de (22).

## § 2. Développement en série de polynômes d'HERMITE.

10. Formules de récurrence pour les polynômes d'HERMITE. — Il est bien connu (et l'on déduit aussi de (2)) que trois polynômes  $H$  consécutifs sont liés par la relation de récurrence

$$H_{m+1}(y) = 2y H_m(y) - 2m H_{m-1}(y), \quad H_0(y) = 1, H_1(y) = 2y. \quad (23)$$

Une généralisation de cette relation est fournie par (16) qui se réduit à (23) si l'on y fait  $n=1$ . Une autre généralisation de (23) sera donnée par l'inversion de (16), c'est-à-dire par le développement

$$H_{m+n}(y) = \sum_{r=0}^{\min(m,n)} A_r^{(m,n)} H_{m-r}(y) H_{n-r}(y), \quad \dots \quad (24)$$

et notre premier problème consiste dans la détermination des coefficients  $A_r^{(m,n)}$ . Pour ce but, appliquons aux deux membres de (24) la transfor-

<sup>17)</sup> ERDÉLYI [2]; le cas particulier  $m=n$ ,  $\alpha=\beta$ , dans WATSON [2].



mation  $G(1, ix)$ . Nous aurons, en vertu de (3b) et (19), le développement ( $m \equiv n$ )

$$(2ix)^{m+n} = \sum_{\nu=0}^n A_{\nu}^{(m,n)} \cdot 2^{m-\nu} (n-\nu)! (ix)^{m-n} L_{n-\nu}^{(m-n)}(2x^2), \quad (24a)$$

ou, après quelques modifications,

$$(-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{\nu=0}^n A_{\nu}^{(m,n)} \cdot \frac{(n-\nu)!}{2^{\nu} n!} \cdot L_{n-\nu}^{(m-n)}(x), \quad (24b)$$

Mais le premier membre est égal, d'après (13b), à  $\sum_{\nu=0}^n (-1)^{\nu} \binom{m}{\nu} L_{n-\nu}^{(m-n)}(x)$ ,

de sorte que  $A_{\nu}^{(m,n)} = (-1)^{\nu} 2^{\nu} \nu! \binom{m}{\nu} \binom{n}{\nu}$ , et ainsi

$$H_{m+n}(y) = \sum_{\nu=0}^{\min(m,n)} (-1)^{\nu} \cdot 2^{\nu} \nu! \binom{m}{\nu} \binom{n}{\nu} H_{m-\nu}(y) H_{n-\nu}(y) \quad (24')$$

Nous retrouvons une propriété déjà rencontrée: les coefficients des deux développements inverses (16) et (24') ne diffèrent que du facteur  $(-1)^{\nu}$ . Le cas particulier  $m=n$  conduit à la relation intéressante:

$$H_{2n}(y) = \sum_{\nu=0}^n (-2)^{n-\nu} (n-\nu)! \binom{n}{\nu}^2 H_{\nu}^2(y) \quad (24'')$$

Nous reviendrons plus tard sur ces formules.

20. Fonctions génératrices pour produits de polynômes d'HERMITE.

a. Reprenons la définition<sup>18)</sup> des polynômes de LAGUERRE, et appliquons-la pour  $m=n-k$  ( $k$  = entier non négatif,  $n=k, k+1, \dots$ ),  $\alpha=2k$ , et  $y=2x^2$ . Multiplions les deux membres par  $(-1)^k x^{2k}$ , et appliquons à la relation ainsi obtenue

$$\sum_{n=k}^{\infty} t^{n-k} (ix)^{2k} L_{n-k}^{(2k)}(2x^2) = \frac{1}{(1-t)^{2k+1}} \cdot e^{-\frac{2tx^2}{1-t}} (ix)^{2k}, \quad |t| < 1$$

la transformation  $G(1, -iz)$ . En tenant compte de (21), on aura ainsi

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k} H_{n+k}(z) H_{n-k}(z)}{2^{n-k} (n-k)!} = \frac{1}{(1-t)^{2k+1}} e^{\frac{2tz^2}{1+t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1+t}{1-t} \left[ x + \frac{(1-t)iz}{1+t} \right]^2} (2ix)^{2k} dx$$

<sup>18)</sup>

$$(1-t)^{-(\alpha+1)} \exp \left[ -\frac{ty}{1-t} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} t^m L_m^{(\alpha)}(y) \quad |t| < 1$$

Un changement de variable d'intégration, et l'application de la formule (3a) donnent finalement

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k} H_{n+k}(z) H_{n-k}(z)}{2^{n-k} (n-k)!} = \frac{1}{(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}}} e^{\frac{2tz^2}{1+t}} H_{2k}\left(z \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right) \quad |t| < 1 \quad (25)$$

Pour  $k=0$ , on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n H_n^2(z)}{2^n n!} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e^{\frac{2tz^2}{1+t}} \quad |t| < 1 \quad . \quad . \quad (25')$$

qui est le cas particulier relatif à  $x=y=z$  de la formule bien connue de MEHLER <sup>18a)</sup>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n H_n(x) H_n(y)}{2^n n!} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{1-t^2} + x^2} \quad |t| < 1.$$

Remarquons encore que (25) peut s'écrire aussi sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n H_n(z) H_{n+2k}(z)}{2^n n!} = \frac{1}{(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}}} e^{\frac{2tz^2}{1+t}} H_{2k}\left(z \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right) \quad |t| < 1 \quad . \quad (25a)$$

et nous voyons que (25a) peut se déduire de la formule de MEHLER par dérivations successives par rapport à  $y$ , en posant ensuite  $x=y=z$ .

b. Considérons l'autre fonction génératrice (11) des polynômes de LAGUERRE, et posons encore  $m=n-k$ ,  $\alpha=2k$ ,  $x=2y^2$  ( $k$  entier non négatif). Si nous remplaçons encore  $t$  par  $2z^2$ , et appliquons la transformation  $G(1, -ix)$ , nous trouvons, en vertu de (21), la formule

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{z^{2n} H_{n+k}(x) H_{n-k}(x)}{(n-k)! (n+k)!} = (-1)^k e^{2z^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+ix)^2} J_{2k}(4yz) dy \quad . \quad (26)$$

$J_{2k}(4yz)$  étant la fonction de BESSEL d'ordre  $2k$ , où  $k$  est un entier non négatif.

En substituant au second membre de (26) l'expression explicite

$$(-1)^k J_{2k}(4yz) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m+2k} (2iy)^{2m+2k}}{m! (m+2k)!} = \sum_{r=k}^{\infty} \frac{z^{2r} (2iy)^{2r}}{(r-k)! (r+k)!},$$

la transformation (3a) donne lieu à la relation

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n H_{n-k}(x) H_{n+k}(x)}{(n-k)! (n+k)!} = e^{2t} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{t^m H_{2m}(x)}{(m-k)! (m+k)!} \quad . \quad . \quad (27)$$

et, en particulier, pour  $k=0$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n H_n^2(x)}{(n!)^2} = e^{2t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m H_{2m}(x)}{(m!)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (27')$$

<sup>18a)</sup> Pour la démonstration de cette formule par la méthode du présent article, et pour l'historique, voir FELDHEIM [6], [7].

Ces deux relations, en identifiant aux deux membres les puissances respectives du paramètre  $t$ , redonnent les développements inverses (16) et (24), et leurs cas particuliers relatifs à  $m = n$ .

c. Terminons ici par la relation, résultant de la formule de HILLE-HARDY<sup>19)</sup>,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n H_n^2(x) H_n^2(y)}{2^{2n} (n!)^2} = \\ = \frac{1}{\pi (1-t)} e^{-\frac{2t(x^2+y^2)}{1-t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(u+ix\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)^2 - \left(v+iy\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)^2} \\ \times J_0\left(\frac{4uv\sqrt{t}}{1-t}\right) du dv, \quad t < 1 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

qui peut encore se mettre sous la forme suivante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n H_n^2(x) H_n^2(y)}{(n!)^2} = \frac{1}{1+4t} e^{\frac{8t(x^2+y^2)}{1+4t}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m H_{2m}(x) H_{2m}(y)}{(1+4t)^{2m} (m!)^2}, \quad |t| < \frac{1}{4}. \quad (29)$$

En tenant compte de<sup>18)</sup>, nous déduisons de (29) la relation, non sans intérêt, qui suit

$$H_n^2(x) H_n^2(y) = (-1)^n (n!)^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k!)^2} H_{2k}(x) H_{2k}(y) L_{n-k}^{(2k)}(2x^2 + 2y^2). \quad (30)$$

En particulier, si  $n = 2m$ , et  $y = 0$ , on a

$$\frac{1}{(m!)^2} H_{2m}^2(x) = \sum_{k=0}^{2m} \binom{2k}{k} \frac{H_{2k}(x)}{k!} L_{2m-k}^{(2k)}(2x^2), \quad \dots \quad (30a)$$

et, pour  $y = x$ ,

$$(-1)^n \frac{1}{(n!)^2} H_n^4(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k!)^2} H_{2k}^2(x) L_{n-k}^{(2k)}(4x^2) \quad \dots \quad (30b)$$

30. Relations entre  $H_n(y)$ ,  $\mathcal{H}_n(y)$  et  $L_n(y^2)$ . — On peut

<sup>19)</sup> Cette formule, comme il est bien connue, est la suivante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! t^n L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(y)}{\Gamma(n+\alpha+1)} = \frac{(txy)^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-t} e^{-\frac{t(x+y)}{1-t}} I_{\alpha}\left(\frac{2\sqrt{txy}}{1-t}\right) \quad |t| < 1$$

Pour différentes démonstrations, et la bibliographie relative, voir p.e. WATSON [1], et FELDHEIM [6].

Pour la légitimité des intégrations terme à terme des séries infinies, effectuées dans ce travail, voir p.e. BROMWICH, An Introduction to the Theory of infinite Series (2. edit., 1926).

déduire de la définition (voir <sup>18</sup>) des polynômes de LAGUERRE l'expression de  $L_m^{(\alpha)}(x)$  à l'aide de ces mêmes polynômes, mais avec le paramètre  $\beta$  <sup>20</sup>):

$$L_m^{(\alpha)}(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{\Gamma(\alpha - \beta + \nu)}{\nu! \Gamma(\alpha - \beta)} L_{m-\nu}^{(\beta)}(x) \dots \dots \dots (31)$$

Si nous y posons  $x = y^2$ ,  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\beta = 0$ , et si nous tenons compte de (15), nous aurons le développement suivant:

$$(-1)^n \frac{H_{2n}(y)}{2^{2n} n!} = L_n(y^2) - \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{2^{2\nu-1} \nu} \binom{2\nu-2}{\nu-1} L_{n-\nu}(y^2) \dots \dots (32)$$

Appliquons maintenant à cette relation la transformation  $G(2, -ix)$ . Les formules (3c) et (21) donneront alors le développement

$$\sum_{\nu=0}^n \frac{\nu!}{2^\nu} \binom{n+1}{\nu+1} \binom{2\nu}{\nu} H_{n-\nu}^2 \left( \sqrt{\frac{x}{2}} \right) = H_{n+1}^2 \left( \sqrt{\frac{x}{2}} \right) - H_{2n+2}(x), \quad (33)$$

ou encore

$$\sum_{\nu=0}^n \frac{\nu!}{2^{2\nu+1}} \binom{n+1}{\nu+1} \binom{2\nu}{\nu} \mathcal{H}_{n-\nu}^2(x) = \mathcal{H}_{n+1}^2(x) - \frac{1}{2^{n+1}} H_{2n+2}(x). \quad (33a)$$

Pour raison de brièveté, nous écrivons ces développements sous la forme

$$H_{2n}(x) = \sum_{\nu=0}^n A_\nu^{(n)} \cdot 2^{2\nu} \mathcal{H}_\nu^2(x), \dots \dots \dots (33')$$

$$(-1)^n H_{2n}(x) = \sum_{\nu=0}^n A_\nu^{(n)} \cdot 2^{2\nu} \nu! L_\nu(x^2), \dots \dots \dots (33'')$$

où l'expression de  $A_\nu^{(n)}$  se déduit facilement de (33a).

Or, si l'on fait dans (31),  $x = y^2$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -\frac{1}{2}$ , on obtient l'inversion de (32),

$$(-1)^n 2^{2n} n! L_n(y^2) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \cdot \nu! \binom{n}{\nu} \binom{2\nu}{\nu} H_{2n-2\nu}(y), \quad (34)$$

et en y appliquant la transformation  $G(2, -ix)$ , il résulte, par suite de (3c) et (21), le développement

$$2^n H_n^2 \left( \sqrt{\frac{x}{2}} \right) = 2^{2n} \mathcal{H}_n^2(x) = \sum_{\nu=0}^n \nu! \binom{n}{\nu} \binom{2\nu}{\nu} H_{2n-2\nu}(x). \quad (35)$$

Les formules (34) et (35) sont encore „inverses” en ce sens que les coefficients des deux séries figurant aux seconds membres ne diffèrent que de  $(-1)^\nu$ .

Continuons, en cherchant le développement, analogue à (32),

$$2^n \cdot \mathcal{H}_{2n}(y) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu^{(n)} \cdot 2^\nu \nu! L_\nu(y^2) \dots \dots \dots (36)$$

<sup>20</sup>) HOWELL [1].

Pour déterminer les  $a_v^{(n)}$ , écrivons (36) sous la forme suivante, en tenant compte de (7) et (33''),

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^n a_v^{(n)} \cdot 2^v v! L_v(y^2) &= \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{(2n)! H_{2r}(y)}{(n-r)!(2r)!} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{r=0}^n \frac{(2n)!}{(n-r)!(2r)!} \sum_{v=0}^r A_v^{(r)} \cdot 2^{2v} v! L_v(y^2) = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{v=0}^n \left\{ \sum_{r=v}^n A_v^{(r)} \frac{2^v (2n)!}{(n-r)!(2r)!} \right\} 2^v v! L_v(y^2) \end{aligned}$$

et nous avons ainsi

$$a_v^{(n)} = \frac{(-1)^n}{2^{n-v}} \sum_{r=v}^n A_v^{(r)} \frac{(2n)!}{(n-r)!(2r)!} \quad (v=0, 1, 2, \dots, n) \quad (36a)$$

avec les valeurs ci-dessus des  $A_v^{(r)}$ .

Cette formule (36) a encore une interprétation intéressante. Appliquons, en effet, à ses deux membres, la transformation  $G(2, ix)$ . En tenant compte de (3b) et (21), on obtient ainsi le développement suivant:

$$(2x)^{2n} = (-1)^n \sum_{v=0}^n a_v^{(n)} H_v^2(x), \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

avec la valeur (36a) des coefficients  $a_v^{(n)}$ .

Insérons ici encore la relation

$$(2x)^{2n} = \sum_{v=1}^n (n-v)! \binom{n-1}{v-1} \binom{2n-v-1}{n-1} (2x)^v H_v(x), \quad . \quad . \quad (38)$$

dont la vérification directe n'offre aucune difficulté.

Une série de la même nature est la suivante:

$$H_{2n}(y) = \sum_{v=0}^n B_v^{(n)} \cdot (2y)^v H_v(y), \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Pour calculer les  $B_v^{(n)}$ , considérons d'abord le développement inverse

$$(2y)^m H_n(y) = \sum_{r=0}^m C_r^{(m,n)} H_{m+n-2r}(y), \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

On peut écrire, au moyen de (4a) et (4b) que

$$C_r^{(m,n)} = \frac{n!}{(m+n-2r)!} \sum_{s=0}^{\min\left(r, \left[\frac{n}{2}\right]\right)} (-1)^s \frac{(m+n-2s)!}{s!(n-2s)!(r-s)!} \quad (r=0, 1, \dots, m) \quad (40a)$$

Pour  $n=0$ , on retrouve (4b). Si  $m=n=v$ ,

$$(2y)^v H_v(y) = \sum_{r=0}^v C_{v-r}^{(v,v)} H_{2r}(y) = \sum_{r=0}^v C_r^{(v)} H_{2r}(y),$$

de sorte que

$$\sum_{r=r}^n B_r^{(n)} C_r^{(\nu)} = \begin{cases} 0, & \text{si } r \neq n \\ 1, & \text{si } r = n \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire } B_n^{(n)} = \frac{1}{C_n^{(n)}}, \dots \quad (39')$$

d'où la détermination des  $E_\nu^{(n)}$  suit immédiatement.

Nous verrons plus tard d'autres développements de cette sorte.

40. Développements des polynômes d'HERMITE en série de polynômes de LAGUERRE et inversement. — Nous avons vu, dans le n<sup>o</sup>. 3, des développements de  $H_n(y)$  en séries de  $L_r(y^2)$ , d'une part, les relations (15) et (31) permettent d'autre part de développer  $H_n(y)$  en séries de  $L_r^{(\alpha)}(y^2)$ , quel que soit le paramètre  $\alpha$ . Dans les lignes qui suivent, nous chercherons l'expression

$$H_n(y) = \sum_{\nu=0}^n h_\nu^{(n,\alpha)} L_\nu^{(\alpha)}(\lambda y) \quad (\lambda \text{ étant un facteur arbitraire}) \quad (41)$$

qui admet des applications. Si nous employons les formules (4a) et (13b), nous trouvons

$$H_n(y) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^s \frac{n!}{s!} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n-2s} \sum_{\nu=0}^{n-2s} (-1)^\nu \binom{n-2s+\alpha}{n-2s-\nu} L_\nu^{(\alpha)}(\lambda y),$$

d'où

$$h_\nu^{(n,\alpha)} = (-1)^\nu \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-\nu}{2}\right]} (-1)^s \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n-2s} \frac{n!}{s!} \binom{n-2s+\alpha}{n-2s-\nu} \quad (41a)$$

Le développement inverse, c'est-à-dire

$$L_n^{(\alpha)}(y) = \sum_{\nu=0}^n l_\nu^{(n,\alpha)} H_\nu(\mu y) \quad (\mu \text{ étant arbitraire}) \quad (42)$$

est aussi facile à déterminer. D'après les relations (13a) et (4b), on a

$$L_n^{(\alpha)}(y) = \sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{n+\alpha}{n-s} \frac{1}{(2\mu)^s} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \frac{s!}{\nu!} \frac{H_{s-2\nu}(\mu y)}{(s-2\nu)!},$$

de sorte que

$$\left. \begin{aligned} (2\nu)! l_{2\nu}^{(n,\alpha)} &= \sum_{s=\nu}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{(2\mu)^{2s} (s-\nu)!} \binom{n+\alpha}{n-2s}, \\ (2\nu+1)! l_{2\nu+1}^{(n,\alpha)} &= - \sum_{s=\nu}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{(2\mu)^{2s+1} (s-\nu)!} \binom{n+\alpha}{n-2s-1} \end{aligned} \right\} \quad (42a)$$



Si l'on fait, dans (31),  $x = y^2$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 0$ , en tenant compte de (15), on obtient

$$(-1)^n H_{2n+1}(y) = 2^{2n+1} n! \sum_{\nu=0}^n \frac{1}{2^\nu} \binom{2\nu}{\nu} y L_{n-\nu}(y^2). \quad (32')$$

D'autre part, des mêmes relations, il résulte le développement inverse

$$\begin{aligned} (-1)^n 2^{2n} n! y L_n(y^2) = \\ = \frac{1}{2} H_{2n+1}(y) + \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu-1} (\nu-1)! \binom{n}{\nu} \binom{2\nu-2}{\nu-1} H_{2n-2\nu+1}(y). \end{aligned}$$

Mentionnons encore la relation suivante, déduite de (32') au moyen de la transformation  $G(2, -ix)$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y+ix)^2}{2}} \frac{H_{2n+1}(y)}{y} dy = (-1)^n 2^{2n} \sum_{\nu=0}^n \frac{\nu!}{2^{2\nu}} \binom{n}{\nu} \binom{2\nu}{\nu} \mathcal{H}_{n-\nu}^2(x), \quad (43)$$

que l'on pourra encore mettre, à l'aide de (15), sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y+ix)^2}{2}} L_n^{(\frac{1}{2})}(y^2) dy = \sum_{\nu=0}^n \frac{\nu}{2^{2\nu+1}} \binom{n}{\nu} \binom{2\nu}{\nu} \mathcal{H}_{n-\nu}^2(x). \quad (43')$$

Il est, d'autre part, très facile à démontrer que

$$H_{2n+1}(y) = 2y \sum_{k=0}^n (-4)^{n-k} (n-k)! \binom{n}{k} H_{2k}(y), \quad (44)$$

de sorte que nous avons, d'après (3c), une autre expression de la somme figurant au second membre de (43):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y+ix)^2}{2}} \frac{H_{2n+1}(y)}{y} dy = 2(-1)^n \sum_{k=0}^n 4^{n-k} (n-k)! \binom{n}{k} H_{2k}(x)$$

D'ailleurs, les relations (24'') et (44) donnent lieu à l'autre développement

$$H_{2n+1}(y) = 2y \sum_{\nu=0}^n b_\nu^{(n)} H_\nu^2(y).$$

Par application de certaines transformations de GAUSS, nous pouvons encore trouver des relations entre  $L_n(y^2)$  et  $H_n(y)$  dignes d'intérêt. Nous laisserons au lecteur le soin d'établir de telles formules.

Pour ce qui est d'applications d'autre nature des développements (41) et (42), nous n'en indiquons que les suivantes. Posons, dans (41),  $y = x^2$ ,  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\lambda = 1$ , qui prend ainsi la forme

$$H_n(x^2) = \sum_{\nu=0}^n h_\nu^{(n, -\frac{1}{2})} L_\nu^{(-\frac{1}{2})}(x^2) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{1}{2^{2\nu} \nu!} h_\nu^{(n, -\frac{1}{2})} H_{2\nu}(x), \quad (45)$$

et (42) donne son inversion

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \cdot 2^{2n} n! \sum_{\nu=0}^n l_{\nu}^{(n, -\frac{1}{2})} H_{\nu}(x^2), \quad . \quad . \quad . \quad (45')$$

et encore

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \cdot 2^{2n+1} n! \sum_{\nu=0}^n l_{\nu}^{(n, +\frac{1}{2})} x H_{\nu}(x^2). \quad . \quad . \quad . \quad (45'')$$

Entre les coefficients des deux développements, il y a la relation suivante <sup>21)</sup>

$$l_{\nu}^{(n, \frac{1}{2})} + 2(\nu + 1) l_{\nu+1}^{(n+1, -\frac{1}{2})} = 0.$$

D'ailleurs, les coefficients de (45) et (45') se déduisent immédiatement de (41a) et (42a).

Les relations précédentes permettent aussi de développer  $H_n^2(x)$  en série de  $H_r(x^2)$ , et inversement,  $H_n(x^2)$  en série de  $H_r^2(x)$ . Nous n'insistons pas ici sur la détermination des coefficients de ces deux séries.

---

<sup>21)</sup> Plus généralement, entre les coefficients de (42), on a la relation de récurrence

$$l_{\nu}^{(n-1, \alpha+1)} + 2(\nu + 1) l_{\nu+1}^{(n, \alpha)} = 0.$$

**Mathematics.** — *Développements en série de polynômes d'HERMITE et de LAQUERRE à l'aide des transformations de GAUSS et de HANKEL.*  
II. Par ERVIN FELDHEIM. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

§ 3. *Généralisation d'une formule concernant le produit de deux polynômes d'HERMITE.*

10. La formule générale. — Nous avons établi <sup>22)</sup> précédemment une formule résultant de l'application de la transformation  $G(a, x)$  aux deux membres du développement (16).

Nous établirons dans ce n<sup>o</sup>. une généralisation de cette relation. Appliquons la formule (2) („fonction génératrice” des polynômes d'HERMITE) pour les variables  $\frac{x+y}{\lambda}$  et  $\frac{x+z}{\mu}$ , multiplions leur produit par  $e^{-\frac{x}{a}}$  ( $Re > 0$ ), et intégrons de  $-\infty$  à  $+\infty$ , par rapport à  $x$ . (La convergence uniforme de la série double permet l'intégration terme à terme.) On trouve

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^m T^n}{m! n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x}{a}} H_m\left(\frac{x+y}{\lambda}\right) H_n\left(\frac{x+z}{\mu}\right) dx = \\ = e^{2\left(\frac{ty}{\lambda} + \frac{Tz}{\mu}\right) - (t^2 + T^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a} + 2\left(\frac{t}{\lambda} + \frac{T}{\mu}\right)x} dx \\ = \sqrt{a\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^{p+r} T^{q+r} \left(1 - \frac{a}{\lambda^2}\right)^{\frac{p}{2}} \left(1 - \frac{a}{\mu^2}\right)^{\frac{q}{2}} (2a)^r}{(\lambda\mu)^r p! q! r!} \\ \times H_p\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda^2 - a}}\right) H_q\left(\frac{z}{\sqrt{\mu^2 - a}}\right). \end{aligned}$$

En identifiant les puissances correspondantes de  $t$  et  $T$  aux deux membres, c'est-à-dire, prenant  $p = m - r$ ,  $q = n - r$  ( $r = 0, 1, 2, \dots, \min(m, n)$ ), où

<sup>22)</sup> FELDHEIM [1], [8].

$\min(m, n)$  désigne le plus petit des deux nombres  $m$  et  $n$ ), nous obtenons la transformation-intégrale désirée:

$$\frac{1}{\sqrt{a\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} H_m\left(\frac{x+y}{\lambda}\right) H_n\left(\frac{x+z}{\mu}\right) dx = \left\{ \begin{aligned} &= \left(1 - \frac{a}{\lambda^2}\right)^{\frac{m}{2}} \left(1 - \frac{a}{\mu^2}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{r=0}^{\min(m,n)} \left(\frac{2a}{\sqrt{(\lambda^2-a)(\mu^2-a)}}\right)^r \\ &\times r! \binom{m}{r} \binom{n}{r} H_{m-r}\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda^2-a}}\right) H_{n-r}\left(\frac{z}{\sqrt{\mu^2-a}}\right) \quad (Ra > 0) \end{aligned} \right\}. \quad (46)$$

Dans cette formule  $y$  et  $z$  sont deux variables auxiliaires, pouvant prendre toute valeur dans l'intervalle  $(-\infty, +\infty)$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  deux paramètres arbitraires et  $a$  une quantité soumise à la condition  $Ra > 0$ .

Observons que dans l'application de cette relation il faut faire attention au signe des racines carrées figurant dans la somme du second membre.

Cette formule contient, comme cas particuliers, un grand nombre des relations démontrées ou énumérées dans les deux premiers paragraphes. Nous en déduirons, dans le n<sup>o</sup>, suivant, d'autres formules intéressantes.

20. Cas particuliers de (46). — a. Le développement (24). Généralisation.

Multiplions les deux membres de (46) par  $\lambda^m \mu^n$ , soit  $a = 1$ , et faisons tendre  $\lambda$  et  $\mu$  vers zéro. Pour ne pas introduire une erreur dans le signe de la racine carrée figurant dans le coefficient du développement (46), faisons d'abord  $\lambda = \mu$ , de sorte que nous aurons l'expression  $\left(\frac{2a}{\lambda^2-a}\right)^r$ . En remplaçant ensuite  $y$  et  $z$  respectivement par  $iy$  et  $iz$ , nous obtenons la généralisation suivante de la formule (24):

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} 2^{m+n} (y+ix)^m (z+ix)^n dx = \left\{ \begin{aligned} &= \sum_{r=0}^{\min(m,n)} (-2)^r r! \binom{m}{r} \binom{n}{r} H_{m-r}(y) H_{n-r}(z) \end{aligned} \right\}. \quad (47)$$

Si l'on fait ici  $z = y$ , le second membre se réduit à celui de (24), le premier, par contre, se met, en vertu de (3a), sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2} (2ix)^{m+n} dx = H_{m+n}(y), \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Passons maintenant à d'autres cas particuliers de (46). Si l'on fait dans (47),  $z = -y$  et  $m = n$ , on trouve

$$\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (x^2 + y^2)^n dx = \sum_{r=0}^n 2^{n-r} (n-r)! \binom{n}{r}^2 H_r^2(y), \quad (47a)$$

qui peut se confronter à (16): les coefficients des deux développements des seconds membres sont égaux (pour  $m = n$ ).

Ensuite, en faisant tendre, dans (46),  $\lambda$  vers 0, et posant  $a = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $z = y$ , il vient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-iy)^2} (2x)^m H_n(x) dx = \left\{ \begin{aligned} &= i^{m+n} \sum_{r=0}^{\min(m,n)} (-2)^r r! \binom{m}{r} \binom{n}{r} (2y)^{m-r} H_{n-r}(y), \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

qui peut se confronter aux développements (39) et (40).

D'ailleurs, pour  $\lambda = \mu = 1$ ,  $a = 1$ , (46) se réduit, comme il est très facile de s'en rendre compte, à la formule (20), et à plus forte raison, à (19). (46) peut encore être considérée comme la généralisation de la formule fondamentale (3).

Nous allons généraliser ici la relation inverse (21), ce qui fournira aussi une démonstration directe pour cette formule. Cherchons, en effet, la transformation  $G(a, ix)$  du produit  $y^p L_n^{(q)}(\lambda y^2)$ ,  $p, q$ , et  $\lambda$  étant assujettis seuls à des restrictions nécessaires pour que l'intégrale existe, et  $Re a > 0$ . En tenant compte de (13a), on aura

$$y^p L_n^{(q)}(\lambda y^2) = \sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{n+q}{n-s} \frac{\lambda^s}{2^{2s+p} s!} (2y)^{2s+p},$$

de sorte que, d'après (3a),

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-ix)^2}{a}} (iy)^p L_n^{(q)}(\lambda y^2) dy = \sum_{s=0}^n \binom{n+q}{n-s} \frac{\lambda^s}{s!} \left( \frac{\sqrt{a}}{2} \right)^{2s+p} H_{2s+p} \left( \frac{x}{\sqrt{a}} \right),$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-ix)^2} (2iy)^p L_n^{(q)}(\lambda y^2) dy = \sum_{s=0}^n \left( \frac{\lambda}{4} \right)^s \binom{n+q}{n-s} \frac{H_{2s+p}(x)}{s!} \quad (49)$$

Si  $p = q = m - n$ ,  $\lambda = 2$ , le second membre de (49) se transforme facilement de façon à redonner, en vertu de (16), la relation (21)<sup>23)</sup>.

<sup>23)</sup> Un résultat encore plus général serait le calcul de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{a}} L_m^{(\alpha)} \left( \frac{y^2}{\lambda} \right) L_n^{(\beta)} \left( \frac{y^2}{\mu} \right) dy.$$

On démontre aussi la relation suivante, s'attachant aux formules inverses (19) et (21),

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{a}} H_m(y) H_n(y) dy = \\ = \frac{2^m n!}{\sqrt{\pi(1-a)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y+ix)^2}{1-a}} (iy)^{m-n} L_n^{(m-n)}(2y^2) dy, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

avec  $m \geq n$ ,  $0 < a < 1$ ,  $x$  étant une quantité quelconque de l'intervalle  $(-\infty, +\infty)$ . On en tire encore, par exemple, la formule intéressante

$$\int_x^{+\infty} e^{-(y-x)^2} \mathcal{H}_m(y) \mathcal{H}_n(y) dy = 2^m n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+ix)^2} (iy)^{m-n} L_n^{(m-n)}(y^2) dy. \quad (50')$$

quel que soit  $x$ .

*b. Autres représentations intégrales déduites de (46).* — En examinant de plus près la formule (46), nous constatons que le second membre peut encore être mis sous forme plus simple, notamment à être identique à celui du développement (24), pour d'autres valeurs particulières des paramètres  $a, \lambda, \mu$ , que celles que nous en avons attribuées dans *a*. Soit, en effet,

$$a = \frac{\lambda^2 \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2}, \quad y = \frac{v \lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}, \quad z = -\frac{v \mu^2}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}.$$

Alors (46) prend la forme suivante

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m\left(\frac{\mu t + \lambda v}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}\right) H_n\left(\frac{\lambda t - \mu v}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}\right) dt = \\ = (-1)^n \frac{\lambda^m \mu^n}{(\lambda^2 + \mu^2)^{\frac{m+n}{2}}} H_{m+n}(v), \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

ou encore, en désignant par  $\theta$  un angle arbitraire,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m(t \sin \theta + v \cos \theta) H_n(t \cos \theta - v \sin \theta) dt = \\ = (-1)^n \cos^m \theta \sin^n \theta \cdot H_{m+n}(v). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , (52) se réduit à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \mathcal{H}_m(v+t) \mathcal{H}_n(v-t) dt = \frac{1}{2^{m+n}} H_{m+n}(v), \quad \dots \quad (52a)$$



tandisque de (20),

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m(t+v) H_n(t-v) dt = 2^m n! v^{m-n} L_n^{(m-n)}(2v^2), \quad (m \geq n) \quad (20')$$

fournissant ainsi pour le second membre une représentation-intégrale légèrement différente de (19). Remarquons que de (20') résulte aussi l'orthogonalité des polynômes d'HERMITE  $H_m(t)$ .

c. Une formule de HOWELL. — Montrons finalement comment les développements (16) et (24) peuvent servir à démontrer très simplement la formule <sup>24)</sup>

$$H_n^2(x) = \frac{(-2)^n}{\binom{2n}{n}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi H_{2n}(x \sqrt{1 - \sec \varphi}) \cos^n \varphi d\varphi. \quad (53)$$

Or, d'après (4),

$$\cos^n \varphi H_{2n}(x \sqrt{1 - \sec \varphi}) = (-1)^n \sum_{r=0}^n (1 - \cos \varphi)^r \frac{(2n)! H_{2r}(x)}{(n-r)! (2r)!}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{(-2)^n}{\binom{2n}{n}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi H_{2n}(x \sqrt{1 - \sec \varphi}) \cos^n \varphi d\varphi &= \\ &= \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \sum_{r=0}^n \frac{(2n)! H_{2r}(x)}{(n-r)! (2r)!} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos \varphi)^r d\varphi. \end{aligned}$$

Etant donné que  $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos \varphi)^r d\varphi = \frac{1}{2^r} \binom{2r}{r}$ , le second membre de (53)

s'écrit ainsi, en tenant encore compte de (16):

$$\begin{aligned} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \sum_{r=0}^n \frac{(2n)!}{(n-r)! (2r)!} \frac{1}{2^r} \binom{2r}{r} H_{2r}(x) &= \\ &= \sum_{r=0}^n 2^{n-r} (n-r)! \binom{n}{r}^2 H_{2r}(x) = H_n^2(x), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de (53).

On aurait pu démontrer de la même façon les formules donnant le produit  $H_m(x)H_n(x)$  par une intégrale finie de la même nature <sup>25)</sup>.

<sup>24)</sup> HOWELL [3].

<sup>25)</sup> W. N. BAILEY, Journal of the London Mathematical Society, **13**, 202—203 (1938). Voir aussi ERDÉLYI [5].

Nous étudierons encore, pour terminer, quelques problèmes relatifs aux polynômes de LAGUERRE, analogues à ceux traités pour les polynômes d'HERMITE.

#### § 4. *Développements en série de polynômes de LAGUERRE.*

10. *Impossibilité de certains développements.* — Cherchons, en analogie avec (24'') et (24'), si l'on peut avoir les développements en série de polynômes de LAGUERRE.

$$L_{2n}^{(2\alpha)}(y) = \sum_{r=0}^n a_r^{(n)} \{L_r^{(\alpha)}(y)\}^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

et plus généralement, avec  $R(\alpha + \beta) > -1$ ,

$$L_{2n}^{(\alpha+\beta)}(y) = \sum_{r=0}^n b_r^{(n)} L_r^{(\alpha)}(y) L_r^{(\beta)}(y). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Appliquons à (55) la transformation de HANKEL, c'est-à-dire, multiplions

les deux membres par  $e^{-y} y^{\frac{\alpha+\beta}{2}} J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{xy})$ , et intégrons-les par rapport à  $y$  de 0 à  $\infty$ . En vertu de (12a) et (22), (55) devient

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{s=0}^n b_s^{(n)} L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Les seconds membres de (56) et (55) étant identiques, il en devrait être de même des premiers membres, ce qui est évidemment absurde. Les développements (54), (55) et (56) sont donc impossibles.

De même, si nous cherchons l'inversion du premier des développements (18), sous la forme

$$L_{m+n}^{(\alpha+\beta)}(y) = \sum_{r=0}^{\min(m,n)} c_r^{(m,n)} L_{m-r}^{(\alpha)}(y) L_{n-r}^{(\beta)}(y), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

nous démontrons, à l'aide de (22), l'impossibilité de telle formule.

20. *Développements possibles en polynômes de LAGUERRE.* — Examinons maintenant s'il existe une valeur du paramètre  $\gamma$  pour laquelle le développement

$$L_{2n}^{(\gamma)}(y) = \sum_{r=0}^n d_r^{(n)} L_r^{(\alpha)}(y) L_r^{(\beta)}(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

soit valable, les coefficients  $d_r^{(n)}$  dépendant encore de  $\alpha$ ,  $\beta$  et de  $\gamma$ . Appli-

quons à (58) la transformation de HANKEL de tout à l'heure. Si nous tenons compte de (22a), la transformée du premier membre de (58) sera

$$\int_0^{\infty} J_{\alpha+\beta_1}(2\sqrt{xy}) e^{-y} y^{\frac{\alpha+\beta}{2}} L_{2n}^{(\gamma)}(y) dy = e^{-x} x^{\frac{\alpha+\beta}{2}} L_{2n}^{(\alpha+\beta-\gamma-2n)}(x).$$

Le second membre, abstraction faite du facteur  $e^{-x} x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ , ne changeant pas par cette transformation, l'identification donne pour  $\gamma$  la valeur  $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} - n$ , de sorte que le développement cherché est

$$L_{2n}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-n\right)}(y) = \sum_{r=0}^n d_r^{(n)} L_r^{(\alpha)}(y) L_r^{(\beta)}(y). \quad (58')$$

Pour déterminer les coefficients  $d_r^{(n)}$ , considérons le développement inverse

$$L_n^{(\alpha)}(y) L_n^{(\beta)}(y) = \sum_{r=0}^n f_r^{(n)} L_{2r}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-r\right)}(y), \quad (58'')$$

dont les coefficients  $f_r^{(n)}$  sont donnés par application convenable de (17) et (17'). Or, entre les coefficients de ces deux dernières séries (58') et (58''), il existe la relation suivante

$$\sum_{r=s}^n f_r^{(n)} d_s^{(r)} = \begin{cases} 0, & \text{si } s \neq n \\ 1, & \text{si } s = n \end{cases}, \quad f_n^{(n)} = \binom{2n}{n},$$

de sorte que

$$d_{n-r}^{(n)} = \frac{(-1)^r}{\binom{2n}{n} \binom{2n-2}{n-1} \cdots \binom{2n-2r}{n-r}} \parallel f_{n-k}^{(n-j+1)} \parallel \quad (j, k = 1, 2, \dots, r) \quad (59)$$

où le symbole  $\parallel f_{n-k}^{(n-j+1)} \parallel$  désigne le déterminant dans lequel les éléments correspondants aux valeurs  $j > k + 1$  sont nuls, les indices supérieurs étant les mêmes dans une même ligne, les indices inférieurs étant égaux dans une même colonne.

Indiquons quelques cas particuliers de (58). Si  $\alpha = \beta$ , on a

$$L_{2n}^{(\alpha-n)}(y) = \sum_{r=0}^n d_r^{(n,\alpha)} \{L_r^{(\alpha)}(y)\}^2,$$

ce qui prend, respectivement pour les valeurs  $\alpha = n$  et  $\alpha = 0$ , les formes

$$L_{2n}(y) = \sum_{r=0}^n d_r^{(n,n)} \{L_r^{(n)}(y)\}^2,$$

et

$$(-1)^n n! y^n L_n^{(n)}(y) = \sum_{r=0}^n d_r^{(n,0)} \{L_r(y)\}^2.$$

D'une autre côté, il peut être essayé de trouver le développement suivant

$$L_{2n}^{(\alpha+\beta)}(2y) = \sum_{r=0}^n g_r^{(n,\alpha,\beta)} L_r^{(\alpha)}(y) L_r^{(\beta)}(y), \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

dont la possibilité résulte de (12c) et (22). La détermination effective des coefficients  $g_r$  peut se faire de la même façon que celle des  $d_r$ . Ainsi, par exemple, tandis que  $L_{2n}(y)$  ne peut pas être développé en une série procédant selon les  $\{L_r(y)\}^2$ , le polynôme  $L_{2n}(2y)$  peut bien être développé en une telle série.

Nous terminons ici cet exposé, en réservant quelques uns des résultats de nos recherches concernant les polynômes de LAGUERRE, pour un autre travail en préparation.

#### BIBLIOGRAPHIE.

APPELL, P.-J. KAMPÉ DE FÉRIET:

1. Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'HERMITE. (1926). Paris. Gauthier-Villars.

A. ERDÉLYI:

1. Funktionalrelationen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Erste Mitteilung: Additions- und Multiplikationstheoreme. Math. Zeitschrift, **42**, 125—143 (1936).
2. The HANKEL Transform of a Product of WHITTAKER's functions. Journ. London Math. Soc., **13**, 146—154 (1938).
3. On some expansions in LAGUERRE Polynomials. Ibidem, **13**, 154—156.
4. On certain HANKEL Transforms. Quarterly Journ. of Math., **9**, 196—198 (1938).
5. An integral representation for the product of two WHITTAKER functions. Journ. of the London Math. Soc. **14**, 23—30 (1939).

E. FELDHEIM:

1. Applicazioni dei polinomi di HERMITE a qualche problema di calcolo delle probabilità. Giorn. Ist. Ital. Attuari, **8**, 303—327 (1937).
2. Quelques nouvelles relations pour les polynômes d'HERMITE. Journ. London Math. Soc. **13**, 22—29 (1938).
3. Polynômes d'HERMITE et inversion des transformations de GAUSS et de LAPLACE. Rendic. Sem. Mat. R. Univ. di Roma, **2** (1938).
4. Résolution de quelques équations fonctionnelles au moyen des polynômes d'HERMITE. Bulletin des Sciences Math. **62** (1938).
5. Formules d'inversion et autres relations pour les polynômes orthogonaux classiques. Bull. Soc. Math. de France. (Sous presse.)
6. Sur les fonctions génératrices des polynômes de LAGUERRE et d'HERMITE. Bull. des Sciences Math. (Sous presse.)
7. La transformation de GAUSS à plusieurs variables. Application aux polynômes d'HERMITE et à la généralisation de la formule de MEHLER. Compositio Math. (Sous presse.)
8. Expansions and Integral-Transforms for Products of LAGUERRE and HERMITE Polynomials. Quarterly Journ. of Math. (Sous presse.)

W. T. HOWELL:

1. On Products of LAGUERRE Polynomials. Philos. Magazine. **7** (24), 396—405 (1937).
2. On some operational Representations of Products of Parabolic Cylinder Functions. Ibidem, **7** (24), 1082—1093 (1937).

3. Integral-Representations for Products of WEBER's Parabolic Cylinder Functions. *Ibidem*, **7** (25), 456—458 (1938).
4. A Note on HERMITE Polynomials. *Ibidem*, **7** (25), 600—601 (1938).
5. On a Class of Functions which are Self-Reciprocal in the HANKEL-Transform. *Ibidem*, **7** (25), 622—628 (1938).

F. TRICOMI:

1. Sulle trasformazioni funzionali lineari commutabili con la derivazione. *Comment. Math. Helvet.* **8**, 70—87 (1935—6).
2. Sulla trasformazione e il teorema di reciprocità di HANKEL. *Rendic. Lincei.* **22**, 564—571 (1935).
3. Les transformations de FOURIER, LAPLACE et GAUSS, et leurs applications au calcul des probabilités et à la Statistique. *Annales de l'Inst. H. POINCARÉ.* **8**, 111—149 (1938).

G. N. WATSON:

1. Notes on generating functions of polynomials. *Journ. London Math. Soc.* **8**, 189—192, 194—199 (1933).
2. An integral equation for the square of a Laguerre polynomial. *Ibidem*, **11**, 256—261 (1936).
3. A Note on the polynomials of HERMITE and LAGUERRE. *Ibidem*, **13**, 29—32 (1938).

*Budapest, le 5 novembre 1939.*

---

**Botany.** — *On the Effect of Substances, produced by Fungi, on the Respiration of the Tissue of Potato Tubers, I.* (Preliminary report.)  
By J. J. A. HELLINGA. (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE.)

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

INTRODUCTION.

The aim of the investigations, reported in this paper, was to study the metabolism of plants affected by infectious diseases.

In many cases the morphology of the infection by parasitic fungi has been thoroughly studied. On the other hand, very little is known of the physiological interaction between parasite and host plant. Mostly the physiological research on the relation between parasite and host is confined to the mechanism of the attack, resistancy factors and physical and chemical alterations within the host plant. This line of research has been broadly reviewed by BROWN (1936).

The primary reaction of the host plant, however, i.e. the changes in its metabolism, by which a stated abnormality in physical and chemical properties mainly is initiated, has been left out of consideration in most cases. This must be due to the difficulties of such a research, since its importance is obvious. Information on the pathological metabolism would not only increase the knowledge of the nature of plant diseases, but probably also that of the mechanism of the metabolism in general.

Still, this field of research is not entirely unexplored. From the literature a number of data on the respiration of infected and diseased plants is known; most of them have been cited by FISCHER and GÄUMANN (1929) and by ROEMER, FUCHS and ISENBECK (1938). Although the effect of widely differing parasites has been investigated, generally an increase of  $\text{CO}_2$  production and/or  $\text{O}_2$  consumption has been observed. Since in most cases the total respiration of host plus parasite had been determined together, it could not be discriminated with certainty whether the increase in respiration was exclusively due to the own respiration of the parasite. In several cases, however, it has been made evident that at least a part of the higher gas exchange is caused by an increased respiration of the host plant. In potato tubers, infected by *Bacillus phytophthorus*, EGLITS (1933) found a rise in temperature not only in the infected part, but also in the surrounding, not infected tissue. This observation suggests a higher metabolic intensity of the tissue of the host under the influence of the parasite. Recently, ALLEN and GODDARD (1938) ingeniously succeeded in separating the respiration of the parasite and that of the host by



removing the epiderm with the parasite (powdery mildew) and estimating the respiration of both separately. The very high respiration rate of infected leaves proved to be caused only partly by the respiration of the fungus itself. According to the authors the probable reason of a higher respiration of the subjacent tissue would be that more oxidizable substrate (carbohydrate) would be made available by a substance diffusing from the parasite or from the infected epiderm.

YARWOOD (1934) inoculated leaves of clover with *Erysiphe polygoni* and with *Uromyces fallens*. These leaves showed an increased respiration, which was maintained after killing of the fungi by means of carbondisulphide. From this it was deduced that the increase in respiration mainly must be ascribed to a stimulating effect of the parasite.

After inoculating a certain object with a parasite, a strongly increased respiration was found in a number of experiments. This statement again has given rise to the question whether this increase is due to the respiration of the parasite or whether it is caused by substances excreted by the parasite and affecting the metabolism of the host plant. Since in the objects used a segregation of parasite and host was impossible, it was tried to solve the problem along quite a different way: it was investigated, whether in the pure culture of the parasite and in the complex parasite-and-host substances are produced that affect the respiration of the host. This actually proved to be the case. The major part of this research further has been devoted to the immediately consequent question, that of the nature and the properties of these substances.

#### MATERIAL AND METHODS.

As parasites several species of *Fusarium* were used, mainly *F. graminearum* (= *Gibberella Saubinetii*) from the Central Bureau of Fungi Cultures, Baarn. Tissue of potato tubers was used as host-plant material.

Although *F. graminearum* in nature particularly occurs in cereals and does not belong to the *Fusarium* species commonly parasitic in potatoes, it was chosen since it can cause an easily diagnosed soft rot in potatoes after inoculation. Further it readily sporulates and abundantly grows in pure culture. The spores are freely produced on an acid oatmeal agar substrate; such cultures were used for the inoculation of potato tissue and of RICHARD's liquid medium. In this medium the fungus was cultivated in flasks (mostly of 500 cm<sup>3</sup>, containing 40 cm<sup>3</sup> of the nutrient) at room temperature, in order to obtain the wanted quantities of mycelium.

The mycelium was gathered on a filter, washed and dried in a vacuum exsiccator over calciumchloride. After grinding it in a mortar with glowd and washed quartz sand, the mycelium was extracted with water or other solvents, centrifuged or filtered and afterwards generally boiled during a short time or sterilized under pressure. This extract, obtained from the mycelium, further will be indicated as *extract I*.

Besides, the filtered culture medium was tested on the action of substances excreted by the fungus. This will be indicated as *extract II*.

Further, extracts were made from sections or cylinders of potato tissue, inoculated some days ahead with the fungus. The infected tissue was extracted with water or ethanol, either immediately, or after grinding in a mortar. This is called *extract III*.

The tubers were stored at a low temperature. Before using them, they were externally sterilized and cut aseptically. The large discs, wanted for preparing *extract III*, were placed on glass plates in sterile Petri dishes over a thin layer of sterile water and then inoculated. When cylinders were used, they were cut aseptically and of equal size by means of the apparatus described by STEWART (1928). They were washed in sterile water, soaked in a suspension of spores of the fungus, blotted and put in sterile culture tubes.

The small discs of potato tissue, used in the respiration experiments, were cut as aseptically as possible with the same apparatus. All discs for one set of experiments were cut from one and the same tuber from cylinders cut just within the ring of vascular strands. These discs were 6 mm in diameter and 0.5 or 1 mm thick. During the night before the experiment they were washed in streaming tap water. The next morning they were divided over the containers of the WARBURG manometers; 30 discs of 1 mm or 60 of 0.5 mm were put in each vessel.

As an apparatus for measuring the respiration a set of 8 WARBURG manometers was at my disposal. They were adjusted on a rotating shaker and kept at a constant temperature of 25° C in a thermostat. The fluctuations in the temperature did not exceed 0.1° C; the rate of shaking was 280, later 220 periods per minute. The volume of the vessels was about 20 cm<sup>3</sup>; they were provided with a central well and one side bulb. As a rule, the discs of potato tissue were suspended in 2 cm<sup>3</sup> of a phosphate buffer solution,  $\frac{1}{15}$  molal, pH = 6.2. The central well contained 0.4 cm<sup>3</sup> or 0.6 cm<sup>3</sup> of a 25 % KOH solution. In the side bulb either at the start of the experiment, or after the first hour 0.6, later 0.3 cm<sup>3</sup> of the extract or of the control liquid was pipetted. One manometer served as a control on changes in the atmospheric pressure and temperature.

It was tried to work as aseptically as possible in order to avoid heavy infections with bacteria. The tap water was practically sterile and also the vessels and the phosphate buffer solution. As a control on sterility several times the suspension liquid in the vessels was tested on bacterial respiration after an experiment. The result proved to be negative when the necessary precautions, mentioned above, had been taken.

The procedure of an experiment was as follows. After putting phosphate buffer solution and discs of potato tissue in the main vessels, KOH in the central wells and extract (or blank control fluid) in the side bulb, the manometers were adjusted on the frame of the thermostat and shaken for about half an hour with opened taps until the temperature equilibrium

had been attained. Then the taps were closed, readings made and the vessels shaken for one hour. After reading the manometers, the content of the side bulbs was quickly poured into the respiration vessels. During the next hours the rate of the respiration was measured and compared to that of the first hour. Sometimes the side bulbs were filled after the first hour, especially when large quantities of extract ( $0.6 \text{ cm}^3$ ) and high shaking rates (280 times per minute) were applied, to prevent the extract from getting prematurely from the bulbs into the main vessels.

By means of the vessel constants the manometer readings were converted into volume units with a limit of accuracy of  $0.2 \text{ mm}^3$ .

After each experiment the pH of the suspension liquid was tested by means of a HELLIGE micro-comparator, in order to be sure that the rate of the respiration had not been influenced by a shifting of the pH.

It must be mentioned that in the mean time several other authors applied the same method — discs of tissue in WARBURG manometers — in plant physiological work (CALDWELL and MEIKLEJOHN (1937), TURNER (1938), BOSWELL and WHITING (1938)). This method, earlier successfully applied for animal tissue, therefore, proves to be also valuable for the study of the metabolism of plant tissue and especially of that of storage tissue.

A few specimens of experiments on the effect of the three extracts are reported below.

## RESULTS OBTAINED WITH EXTRACT I.

### *a. Extracts from mycelia from different cultures.*

*Experiment: Extract I* prepared from mycelia of *Gibberella Saubinetii* of different age. Central well:  $0.4 \text{ cm}^3$  of 25 % KOH. Respiration vessel: 60 discs of  $0.5 \text{ mm}$  from a "Z. Eigenheimer" tuber, washed. Shaking rate: 280 times per minute.

Side bulb filled after first hour with  $0.6 \text{ cm}^3$  of:

vessel 1: distilled water,

vessel 2—6:  $0.221 \text{ gr}$  powdered mycelium in  $10 \text{ cm}^3$  aq. dest.,

vessel 7: fresh mycelium from one culture flask, ground with sand, in  $15 \text{ cm}^3$  aq. dest.

Cold extracted, centrifuged and boiled for 10 minutes on water bath.

TABLE I. (Expt. 20—10—38).

No.	Side bulb	Oxygen consumed:				
		mm <sup>3</sup> /hour	in % of 1st. hour			
			1st. hour	1st.	2nd.	3rd.
1	dist. water	42.8	100	123	125	128
2	extr. I (14—21/ 5/38)	41.6	100	208	186	204
3	„ I (12/9— 6/10/38)	42.6	100	210	193	212
4	„ I (12—24/ 9/38)	38.9	100	203	184	199
5	„ I (20/5—11/ 6/38)	45.3	100	204	192	196
6	„ I (20/5— 4/ 6/38)	46.4	100	194	177	191
7	„ I (12/9—19/10/38)	43.3	100	196	186	203

The results are represented in table 1 and in fig. 1. It is evident that in *all* vessels the rate of the respiration is about doubled immediately after adding the extract. This high level is maintained during the next two hours. In the control vessel (addition of aq. dest.) the respiration was increased 20—30 % only.

The effect of the extracts in this experiment is high as compared to that of experiments with similar extracts taken in another season. This probably

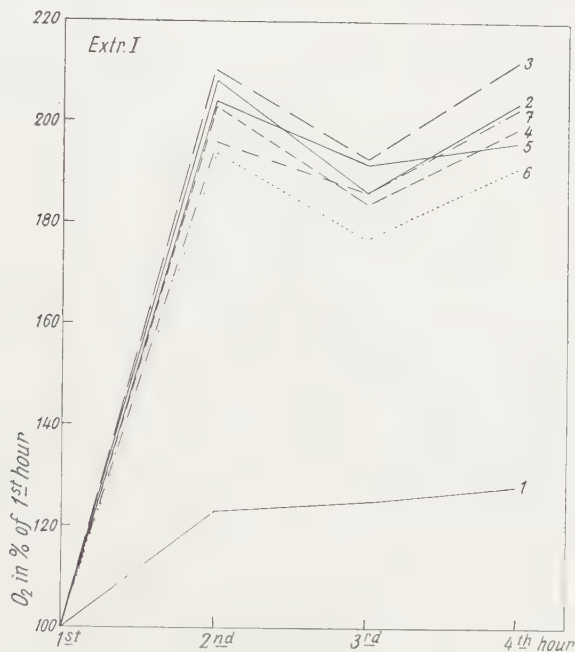


Fig. 1. See table 1.

has to be ascribed to the physiological state of the potato at the time of the experiment; in our experiment it was the end of the dormant period of the tuber. Also in the next experiment, taken in the same season, the effect of extract I was particularly high.

#### *b. Activity of strongly diluted extracts.*

*Experiment:* Extract I prepared from 0.543 gr of mycelium of *Gibberella Saubinetii*, cultivated from 14—24/5/38, suspended in 15 cm<sup>3</sup> aq. dest., then sterilized ( $\frac{1}{2}$  atm. effective pressure during  $\frac{1}{2}$  hour) and decanted. Diluted with sterile aq. dest.

Central well: 0.6 cm<sup>3</sup> of 25 % KOH. Respiration vessel: 60 discs of 0.5 mm from a "Z. Eigenheimer" tuber, washed. Shaking rate: 280 times per minute.

Side bulb filled after first hour with 0.6 cm<sup>3</sup> of the extract in different concentrations.

This experiment clearly shows that the effect of the extract on the respiration is maintained at very low concentrations. Even the extract in vessel 2 (concentration: 1 in 10<sup>5</sup>) still showed a consistent effect. In 0.6 cm<sup>3</sup> of this extract only the soluble substance of 0.2  $\gamma$  of dry matter of mycelium was present.

TABLE 2. (Expt. 12—10—38).

No.	Side bulb	Oxygen consumed:				
		mm <sup>3</sup> /hour	in % of 1st. hour			
			1st. hour	1st.	2nd.	3rd.
1	dist. water	34.1	100	107	120	129
2	extr. I (conc. 10 <sup>-5</sup> )	31.1	100	122	130	135
3	„ I „ 10 <sup>-4</sup> )	30.4	100	133	135	139
4	„ I „ 10 <sup>-3</sup> )	30.3	100	151	138	146
5	„ I „ 10 <sup>-2</sup> )	34.3	100	162	144	159
6	„ I „ 10 <sup>-1</sup> )	33.1	100	194	178	190
7	„ I	33.4	100	218	203	204

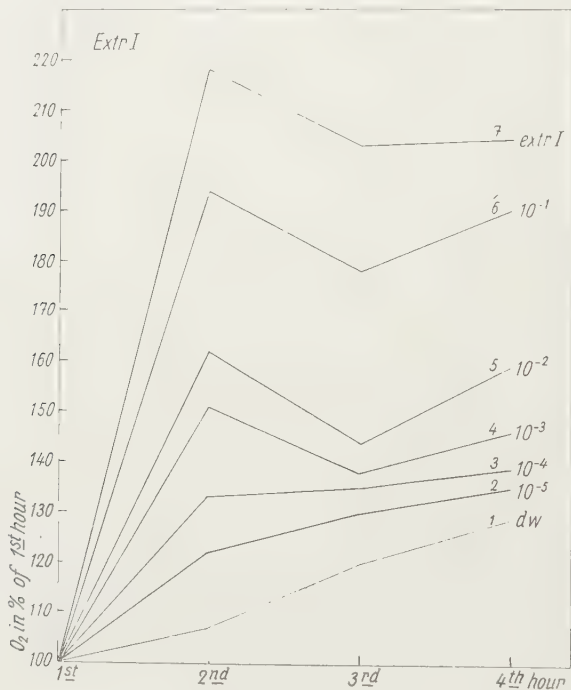


Fig. 2. See table 2.

As mentioned above, the high effect of the extract on the rate of the respiration probably must be connected with a special physiological state of the object. This, however, does not refute that the potential activity of the extracted agent is clearly demonstrated. Moreover, in this experiment the thermostability of the agent is shown.

### c. Specificity of the fungus.

*Experiment:* Extract I prepared from mycelia of 5 different *Fusaria*, cultivated from 17/3—13/4/39, 1 gr of mycelium powder in 20 cm<sup>3</sup> aq. dest., boiled on water bath and decanted after settling.



Central well: 0.4 cm<sup>3</sup> of 25 % KOH. Respiration vessel 30 discs of 1 mm from a "Bintje" tuber, washed. Shaking rate: 220 times per minute.

Side bulb: 0.3 cm<sup>3</sup> of the extracts.

TABLE 3. (Expt. 20—4—39).

No.	Side bulb	Oxygen consumed:					
		mm <sup>3</sup> /hour	in % of 1st. hour				
			1st. hour	1st.	2nd.	3rd.	4th.
1	dist. water	44.5	100	99	114	117	124
2	" "	41.7	100	108	116	127	129
3	extr. I <i>F. coeruleum</i>	42.3	100	148	172	168	174
4	" I <i>F. bulb.</i> var. <i>lyc</i>	46.0	100	141	157	155	163
5	" I <i>F. oxysporum</i> f.l.	43.8	100	144	160	157	167
6	" I <i>G. Saubinetii</i>	43.6	100	145	157	155	160
7	" I <i>F. trichothecioides</i>	42.1	100	159	172	169	158

All *Fusaria* tested (of which *F. coeruleum*, *F. oxysporum* and *F. trichothecioides* are known as parasites on potatoes) prove to contain the active agent, although it is not produced in the same quantities by all mycelia. Parenthetically it must be emphasized that the effect of the extract of *F. trichothecioides*, being high in the beginning, quickly decreases. The same phenomenon will be found with extract II of this fungus. The extracts of the other *Fusaria* gave a much more stable increase of the respiration.

#### d. The respiratory quotient.

The addition of extract I does not only increase the O<sub>2</sub> consumption by the tissue of potatoes, but also the CO<sub>2</sub> production. The normal R.Q., calculated according to the formula given by WARBURG and YABUSOE (1924), lays between 1.02—1.07. After the addition of extract I values were obtained between 1.06—1.09. The agent therefore did not markedly affect the R.Q.

#### e. Adsorption by coal.

*Experiment:* Extract I prepared from 0.221 gr of mycelium of *Gibberella Saubinetii*, cultivated from 12/9—6/10/38, in 50 cm<sup>3</sup> aq. dest., boiled. A part of it was treated with a small quantity of carbo absorbens, centrifuged and treated once more with coal.

Central well: 0.4 cm<sup>3</sup> of 25 % KOH. Respiration vessel: 60 discs of 0.5 mm from a "Z. Eigenheimer" tuber, washed. Shaking rate: 280 times per minute.

Side bulb: 0.6 cm<sup>3</sup> of extract and filtrates.

TABLE 4. (Expt. 27—10—38).

No.	Side bulb	Oxygen consumed:					
		mm <sup>3</sup> /hour	in % of 1st. hour				
		1st. hour	1st.	2nd.	3rd.	4th.	5th.
1	dist. water	50.4	100	116	120	132	136
2	extr. I	55.7	100	156	147	160	164
3	extr. I (1st. coal-filtr.)	54.7	100	151	137	147	148
4	„ I (2nd. coal-filtr.)	54.0	100	121	120	130	134



The effect of the extracts on the respiration disappeared after repeated treatment with coal. This points towards some surface activity of the agent.

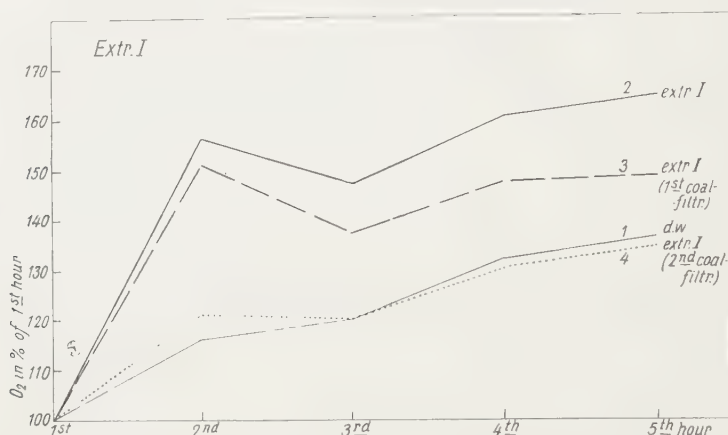


Fig. 3. See table 4.

#### f. Adsorption by the SEITZ filter plate.

*Experiment:* Extract I prepared from 0.19 gr of mycelium of *Gibberella Saubinetii*, cultivated from 20/5—11/6/38, in 10 cm<sup>3</sup> aq. dest. A part of it was filtered through the SEITZ K-filter, another part through the SEITZ EK-filter.

Central well: 0.4 cm<sup>3</sup> of 25 % KOH. Respiration vessel: 60 discs of 0.5 mm from a "Z. Eigenheimer" tuber, washed. Shaking rate: 280 times per minute.

Side bulb: 0.6 cm<sup>3</sup> of the extract and filtrates.

TABLE 5. (Expt. 1—11—38).

No.	Side bulb	Oxygen consumed:			
		mm <sup>3</sup> /hour	in % of 1st hour		
			1st.	2nd.	3rd. hour
1	dist. water	40.7	100	90	118
2	extr. I	40.0	100	180	175
3	„ I Seitz K-filtr.	37.5	100	124	144
4	„ I Seitz EK-filtr.	39.2	100	119	130

Also the SEITZ filter plate does adsorb a great deal of the agent; the K-filter to a minor extent than the EK-filter.

#### g. Inhibition of the respiration by cyanic acid.

In potatoes the Cu-containing catechol- (polyphenol-) oxidase system occurs, that can be blocked with cyanic acid (KUBOWITZ, 1937). BOSWELL and WHITING (1938) found that about 67 % of the respiration of potatoes run over this system, the 33 % of the "residual" respiration being due to a different system. Since the residual respiration possibly might prove not to be sensitive to HCN, it would be possible to discriminate in that case, which of the two systems is affected by extract I.

The experiments are resumed in table 6 and fig. 4.

*Experiment: Extract I* prepared from 0.221 gr of mycelium of *Gibberella Saubinetii*, cultivated from 12/9—6/10/38, in 10 cm<sup>3</sup> aq. dest., boiled. Dry matter: 7.5 mgr per cm<sup>3</sup>.

Central well: 0.4 cm<sup>3</sup> of 5% KOH. Respiration vessel: 60 discs of 0.5 mm from a "Z. Eigenheimer" tuber, washed, in 2 cm<sup>3</sup> of a phosphate buffer solution, pH = 6.2. To the vessels 2 and 3 0.3 cm<sup>3</sup> of a  $6 \cdot 10^{-3}$  molal KCN solution was added. Shaking rate: 280 times per minute.

Side bulb: controls (1 and 2) dist. water; 3 and 4 0.3 cm<sup>3</sup> of extract I.

TABLE 6. (Expt. 25—11—38)

No.	Side bulb	Respiration vessel	Oxygen consumed in mm <sup>3</sup> /hour:			
			1st.	2nd.	3rd.	4th. hour
1	dist. water	pH buffer + dist. water	38.2	39.5	44.5	46.4
2	dist. water	pH buffer + KCN	13.9	16.4	12.2	14.5
3	extr. I	pH buffer + KCN	16.8	15.6	13.3	13.8
4	extr. I	pH buffer + dist. water	39.7	68.9	67.8	70.2

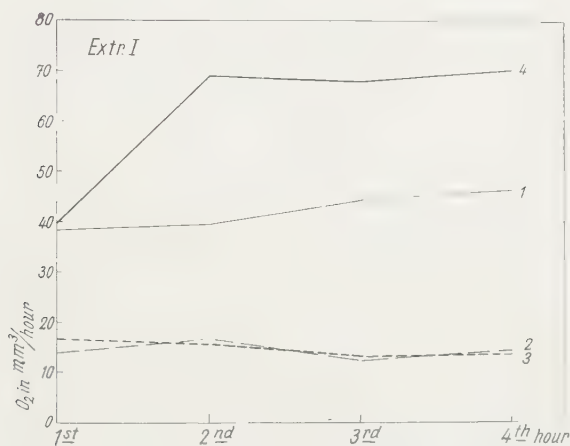


Fig. 4. See table 6.

From this experiment may be concluded that:

1. an  $\pm 0.0005$  molal KCN solution inhibits the respiration of potato discs for about 60—65 %;
2. after treatment with KCN the addition of extract I does not affect the residual respiration of 35—40 %.

Since higher concentrations of KCN possibly would have caused a still stronger inhibition than 60—65 %, it is not conclusively proven by this experiment that BOSWELL and WHITING's "residual" respiration is not sensitive to KCN. Still, one may safely assume that in my experiment mainly the polyphenol oxidase system has been blocked by the HCN. The lack of any effect of extract I on the blocked respiration, therefore, points in the direction that its agent acts upon the polyphenol oxidase system.

## RESULTS OBTAINED WITH EXTRACT II.

As mentioned above, this "extract" is obtained by filtering the culture fluid of the pure culture of the fungus. The RICHARD's liquid medium contains 5 % of glucose or saccharose. These sugars prove to have an effect of their own on the respiration: this "sugar effect" will be discussed below. Mostly also the extract II still contained some reducing sugars (LUFF reaction, see SCHOORL 1937, p. 149). In order to ascertain whether extract II had a stronger effect than that of the sugars present in it, sterile, not inoculated culture medium was used as a control liquid. The sugar effect of the latter certainly compensates that of extract II.

a. *Effect of extract II before and after treatment with adsorbent coal and SEITZ filtration.*

*Experiment:* Extract II from a culture of *Gibberella Saubinetii*, cultivated from 31/10—21/11/38, on RICHARD's solution (5 % of glucose), filtered through filter paper. A part filtered through the SEITZ filter and stored in refrigerator. Another part treated with coal: 10 cm<sup>3</sup> shaken with  $\pm$  0.5 gr coal, centrifuged after two hours. All liquids boiled before use.

Central well: 0.4 cm<sup>3</sup> of 25 % KOH. Respiration vessel: 30 discs of 1 mm from a "Z. Eigenheimer" tuber, washed. Shaking rate: 280 times per minute.

Side bulb: 0.3 cm<sup>3</sup> of different extracts or RICHARD's medium (controls).

TABLE 7. (Expt. 5—1—39).

No.	Side bulb	Oxygen consumed:				
		mm <sup>3</sup> /hour	in % of 1st. hour			
		1st. hour	1st.	2nd.	3rd.	4th. hour
1	Rich. solution	53.4	100	124	144	162
2	Rich. sol., coal-filtrate	58.5	100	118	135	154
3	extr. II	61.0	100	135	161	181
4	extr. II, coal-filtrate	56.5	100	107	125	138
5	extr. II, Seitz EK-filtrate	53.0	100	125	140	159
6	extr. II, Seitz- and coalfiltrate	59.0	100	118	126	145

This instance of an experiment shows that also extract II has a clear effect. It also shows that this effect is much stronger than an eventual sugar effect on the respiration of potato tissue. Furthermore, the agent is adsorbed by the SEITZ filter here too, though not very effectively. This probably must be ascribed to the fact that a larger quantity of the solution had to pass the filter. The treatment with a relatively large quantity of coal almost completely removes the agent from the extract but only slightly influences the sugar effect of the RICHARD's solution.

b. *Insolubility of the agent in ether and chloroform.*

*Experiment:* A part of the extract (untreated) of table 7 was evaporated until almost dry and then solved in 1/5 of the original volume (concentration 5 $\times$ ). Another part was washed with ether and a third part with chloroform. Both, as well the ether- and chloroform fractions as the water fractions, were evaporated and solved in 1/5 of the original

volume. The RICHARD's solution too was evaporated to a  $5\times$  greater concentration. Before the experiment all liquids were boiled for a short time.

Central well:  $0.4\text{ cm}^3$  of 25% KOH. Respiration vessel: 30 discs of 1 mm from a "Z. Eigenheimer" tuber, washed. Shaking rate: 280 times per minute.

Side bulb:  $0.3\text{ cm}^3$  of the preparations, indicated in first column of table 8.

TABLE 8. (Expt. 4—1—39).

No.	Side bulb	Oxygen consumed:					
		mm <sup>3</sup> /hour	in % of 1st. hour				
			1st. hour	1st	2nd.	3rd.	4th. 5th. hour
1	Rich. sol. ( $5\times$ )	39.2	100	157	183	195	199
2	extr. II ( $5\times$ )	38.9	100	167	228	248	258
3	extr. II untreated	42.7	100	141	173	191	197
4	extr. II, chloroform-extr. (water-fraction)	43.3	100	156	197	228	238
5	extr. II, chloroform-extr. (chl. fraction)	40.2	100	114	139	140	148
6	extr. II, ether-extract (water-fraction)	43.5	100	162	234	252	258
7	extr. II, ether-extract (ether-fraction)	40.7	100	118	139	148	149

The experiment shows that the agent is not soluble in ether nor in chloroform (the same holds true for extract I). The water soluble fractions almost completely kept their activity. The sugar effect of the concentrated RICHARD's solution ( $5\times$ ) was remarkably high.  $0.3\text{ cm}^3$  of a 25% glucose solution gave the same strong increase of the respiration:

Date	Side bulb	O <sub>2</sub> consumption in mm <sup>3</sup> in first hour	O <sub>2</sub> consumption in % of 1st hour			
			1st.	2nd.	3rd.	4th. hour
5/1/39	$0.3\text{ cm}^3$ of 25% glucose	45.8	100	144	167	190

This sugar effect will be discussed later.

*c. The agent is quickly produced by the fungus in pure culture.*

*Experiment:* Extract II from a culture of *Gibberella Saubinetii*, cultivated from 17—22/3/39; 5 days old, filtered twice aseptically through double, hard filter. A part of it (II—V) boiled for a short time.

Central well:  $0.4\text{ cm}^3$  of 25% KOH. Respiration vessel: 30 discs of 1 mm from a "Bintje" tuber, washed during  $2\frac{1}{2}$  days. Shaking rate: 220 times per minute.

Side bulb:  $0.3\text{ cm}^3$  of the extracts.

TABLE 9. (Expt. 24—3—39).

No.	Side bulb	Oxygen consumed:				
		mm <sup>3</sup> /hour	in % of 1st. hour			
			1st. hour	1st.	2nd.	3rd. 4th. hour
1	Richards-solution	47.8	100	116	127	134
2	" "	46.9	100	114	126	132
3	extract II	47.6	100	134	148	155
4	" II	47.7	100	138	153	161
5	extract II—V	48.3	100	136	144	143
6	" II—V	45.8	100	136	147	148

The agent apparently is already present in pure cultures of 5 days old. In this experiment also the thermostability of extract II is proven.

d. *Specificity of the agent.*

*Experiment:* Extract II from cultures of 5 different *Fusaria* on RICHARD's solution, cultivated from 17/3—13/4/39, filtered through hard filter and sterilized at a high temperature (during 1 hour at  $\frac{3}{4}$  atm. effective pressure).

Central well: 0.4 cm<sup>3</sup> of 25 % KOH. Respiration vessel: 30 discs of 1 mm from a 'Bintje' tuber, washed. Shaking rate: 220 times per minute.

Side bulb: 0.3 cm<sup>3</sup> of the extracts.

TABLE 10. (Expt. 19—4—39).

No.	Side bulb	Oxygen consumed:					
		mm <sup>3</sup> /hour	in % of 1st. hour				
			1st. hour	1st.	2nd.	3rd.	4th. 5th. hour
1	Richards-solution	55.7	100	128	134	140	142
2	" "	51.7	100	128	136	137	144
3	extr. II <i>G. Saubinetii</i>	56.6	100	132	138	142	140
4	" II <i>F. oxysporum</i>	58.1	100	138	140	145	149
5	" II <i>F. bulb. var. lyc.</i>	58.1	100	145	150	153	158
6	" II <i>F. coeruleum</i>	58.9	100	138	138	142	147
7	" II <i>F. trichothecioides</i>	57.6	100	157	146	126	114

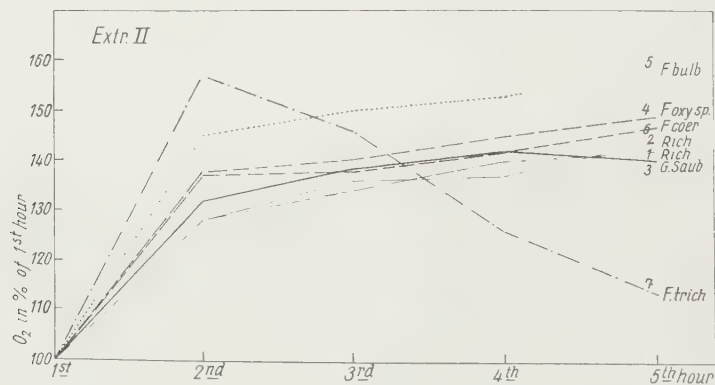


Fig. 5. The effect of extract II of different *Fusaria* (see table 10).

As was the case with extract I (see p. 255), also the effect of extract II on the respiration appears not to be specific for *Gibberella Saubinetii*. The relatively low effect in this experiment probably must be ascribed to a partly inactivation of the agent by the long lasting sterilisation at a high temperature. Still there are clear differences between the effects of the extracts from different *Fusaria*. Again it is the extract II from *Fusarium trichothecioides* that — as the extract I from this fungus — behaves differently: after a strong increase of the respiration in the beginning, a strong *inhibition* appears which reduces the respiration below the level



of the control and sometimes (in other experiments) even below its original level. In another paper I hope to report in detail on this inhibiting effect.

e. *Alcalinity of the culture solution.*

Many scientists, as f.i. LUZ (1934), reported already the alcalinisation of RICHARD's solution by growing *Fusaria* in it. I likewise found pH values of 8.8 and higher, especially during the summer when the growth is vigorous and also in diluted RICHARD's solution in which the sugars soon are exhausted. The alcalinity, however, cannot be closely connected to the action of the extract on the respiration, since filtrates from young cultures (pH = 4.8 and 6.3) as well as alkaline filtrates that were acidified showed a normal activity.

f. *The agent is not volatile.*

The activity of the extract after evaporation on a water bath as well as the thermostability gave already indications that the agent is not volatile. This was confirmed by an experiment in which the distillates of extract II from *Gibberella Saubinetii* and that from *Fusarium trichothecioides* proved to be without any effect on the respiration of potato tissue.

g. *Precipitation of the agent by Ba (OH)<sub>2</sub>.*

In the beginning it was tried to eliminate the — possibly disturbing — effect of sugars in extract II by precipitation of the sugars by means of a methanol solution of Ba(OH)<sub>2</sub> (BABA, 1935). To this purpose the evaporated culture solution was extracted with methanol and to the extract a saturated solution of Ba(OH)<sub>2</sub> in methanol was added until the filtrate failed to show a FEHLING- (LUFF-) reaction. The filtrate, freed from Ba(OH)<sub>2</sub>, evaporated and solved in distilled water, however, proved to be only weakly active on the respiration. On the other hand the precipitate, treated with CO<sub>2</sub> or H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>, appeared to contain the major part of the agent and also all of the sugars. This method, therefore, failed to eliminate the sugars, but it showed that the agent is precipitated by Ba(OH)<sub>2</sub>.

h. *Sugar free extract II.*

I succeeded in getting an extract II, free from reducing sugars and still active, by cultivating the fungus in a 10 times diluted RICHARD's solution.

*Experiment:* Culture of *Gibberella Saubinetii*, cultivated from 12/4—10/5/39 in RICHARD's solution of 1/10 concentration. Filtered through a hard filter, heated during 2½ minute on a water bath of 100° C. LUFF reaction on reducing sugars negative<sup>1)</sup>.

Central well: 0.4 cm<sup>3</sup> of 25 % KOH. Respiration vessel: 30 discs of 1 mm from a "Bintje" tuber, washed. Shaking rate: 220 times per minute.

Side bulb: 0.3 cm<sup>3</sup> of the extract.

---

<sup>1)</sup> Fresh RICHARD's solution of 1/10 concentration clearly shows a positive LUFF reaction.



TABLE 11. (Expt. 2—5—39).

No.	Side bulb	Oxygen consumed:				
		mm <sup>3</sup> /hour	in % of 1st. hour			
		1st. hour	1st.	2nd.	3rd	4th. hour
1	Richards-sol. (1/10)	64.8	100	116	120	119
2	extr. II	67.3	100	134	135	128

According to the relatively scanty growth of the fungus on this diluted substrate, the effect of the extract was low, but in this case it was certainly independent of the sugar effect.

*i. Rinsing out the adsorbed agent.*

It has been mentioned that the agent causing the increase of the respiration is adsorbed by the SEITZ filter and by activated coal. It proved to be possible to liberate the agent again by rinsing out the adsorbent.

*Experiment:* 50 cm<sup>3</sup> of *extract II* (*Gibberella Saubinetii* cultivated from 12/4—10/5/39 in RICHARD's solution, diluted to 1/5) pH = 5.9, were pressed twice through a SEITZ EK-filter. The filter plate then was washed with 50 cm<sup>3</sup> acetone-ammonium (5 % of conc. NH<sub>4</sub>OH in 60 % of acetone solution); the eluate was evaporated in vacuo and solved in 50 cm<sup>3</sup> distilled water<sup>1</sup>).

Further 50 cm<sup>3</sup> of the same *extract II* twice were shaken during half an hour with 0.5 gr carbo absorbens and filtered on a hard filter. Then the coal was rinsed with 50 cm<sup>3</sup> acetone-ammonium, the eluate filtered, evaporated and solved in 50 cm<sup>3</sup> distilled water<sup>1</sup>).

Central well: 0.4 cm<sup>3</sup> of 25 % KOH. Respiration vessel: 30 discs of 1 mm from a "Bintje" tuber, washed. Shaking rate: 220 times per minute.

Side bulb: 0.3 cm<sup>3</sup> of the eluates, resp. filtrates.

TABLE 12. (Expt. 16—5—39)

No.	Side bulb	Oxygen consumed:					
		mm <sup>3</sup> /hour	in % of 1st. hour				
		1st. hour	1st	2nd.	3rd.	4th.	5th. hour
1	dist. water	53.3	100	107	116	113	119
2	extr. II Seitz EK-filtr.	57.4	100	135	141	143	142
3	extr. II Seitz EK-eluate	51.5	100	135	138	138	136
4	extr. II coal-filtrate	56.7	100	121	124	128	127
5	extr. II coal-eluate	48.6	100	136	142	143	144

The coal filtrate being less active than the SEITZ filtrate, accordingly, the eluate of coal is a little stronger in activity than the eluate of the SEITZ filter. The SEITZ eluate was negative in the LUFF reaction. The preparation of the agent, freed in this way from a number of associated substances, gives a suitable starting point for further investigations on the properties of the agent. Unfortunately, the research along this track had to be interrupted.

<sup>1</sup>) In another experiment the eluate of a blank SEITZ EK-filter plate and of fresh coal with acetone-ammonium did not yield any agent, active on the respiration.

## RESULTS OBTAINED WITH EXTRACT III.

The effect on the respiration of potato tissue, stated in the preceding sections, is caused by substances produced by the fungus *in pure culture*. In the latter, the environmental conditions are widely different from those in the *natural substrate* of the parasite. In the natural substrate not only other substances are present but also the quantitative proportion between fungus and substrate are fundamentally different. Substances, produced in high concentrations in pure cultures, need not necessarily be produced in the parasitic relations too or they might possibly be produced in physiologically inactive concentrations only.

Extract III contains substances, produced in the natural medium, but — as a consequence of the extraction — in a concentration distinctly lower than that in the natural substrate itself.

Since also the healthy tissue of potatoes can deliver substances that affect the respiration (ONSLow, 1919), I extracted and tested as controls aseptically cut, not inoculated but equally incubated cylinders of potato tubers in the same way as the inoculated cylinders.

## a. Activity of extract III.

*Experiment:* Water and ethanol extracts were compared. Culture of *Gibberella Saubinetii* on aseptically cut cylinders of "Bintje" tubers, 35 mm long, in culture tubes, incubated from 6—14/3/39. Controls: sterile blank potato cylinders. Each cylinder extracted during one night in 5 cm<sup>3</sup> of sterile tap water or in 5 cm<sup>3</sup> of ethanol, then liquids filtered. Water extracts sterilized (during 30 minutes at  $\frac{1}{2}$  atm. effective pressure); ethanol extract evaporated in vacuo and dissolved in the same quantity of water (Extract III-b and control B).

All extracted cylinders were ground in a mortar and extracted once more in ethanol 80%, evaporated in vacuo and dissolved in 5 cm<sup>3</sup> of water per cylinder (Extract III-a and control A).

Central well: 0.4 cm<sup>3</sup> of 25% KOH. Respiration vessel: 30 discs of 1 mm from a "Bintje" tuber, washed. Shaking rate: 220 times per minute.

Side bulb: 0.3 cm<sup>3</sup> of extracts, resp. controls.

TABLE 13. (Expt. 16—3—39).

No.	Side bulb	Oxygen consumed;				
		mm <sup>3</sup> /hour	in % of 1st. hour			
			1st. hour	1st.	2nd.	3rd.
1	dist. water	46.0	100	120	116	117
2	control A (ethanol extr.)	46.4	100	126	119	114
3	extr. IIIa (ethanol extr.)	43.9	100	145	132	130
4	control B (ethanol extr.)	40.8	100	136	131	130
5	extr. IIIb (ethanol extr.)	42.8	100	146	144	142
6	control B (water-extr.)	44.3	100	125	124	124
7	extr. IIIb (water-extr.)	44.1	100	142	150	145

This experiment clearly proves the activity of extract III. The difference between water extract (III-b) and control is larger than that between

ethanol extract (III-b) and control. This must be due to the high activity of control *B* (ethanol extract).

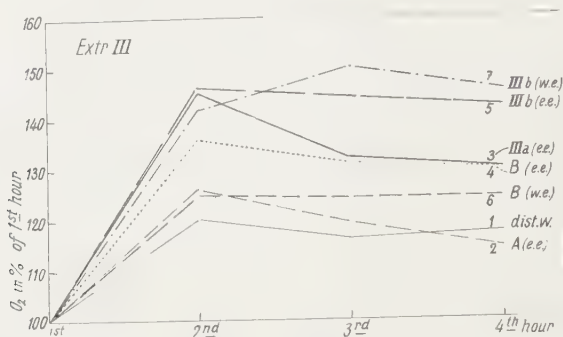


Fig. 6. See table 13.

ONSLow (1919) isolated from potato tissue an aromatic compound, soluble in ethanol, that contained the catechol group (2 hydroxyl groups in ortho position) and is one of the constituents of the catechol oxidase system. BOSWELL and WHITING (1938) found that the respiration of potato discs is increased for about 20 % by this substance, as compared to the respiration in phosphate buffer solution only. Doubtlessly this compound is also present in our ethanol extracts. In this connection it must be emphasized that the ethanol extract (III-b) has no greater activity than the water extract (III-b). It further follows from the experiment that extract III is thermostable too.

#### b. Extract III after treatment with coal.

*Experiment:* Cylinders of "Z. Eigenheimer" tubers, 35 mm long, inoculated with *Gibberella Saubinetii*, incubated from 31/10—11/11/38. Controls: sterile cylinders. One night over in 5 cm<sup>3</sup> of aq. dest., liquid filtered, boiled and stored in refrigerator. pH (high!) reduced to 6.8. 10 cm<sup>3</sup> of III and B (control) twice treated with  $\pm$  0.2 gr adsorbent coal (Norite).

Central well: 0.4 cm<sup>3</sup> of 25 % KOH. Respiration vessel: 60 discs of 0.5 mm from a "Z. Eigenheimer" tuber, washed. Shaking rate: 280 times per minute.

Side bulb: 0.6 cm<sup>3</sup> of the extracts, added after first hour.

TABLE 14. (Expt. 15—11—38).

No.	Side bulb	Oxygen consumed:			
		mm <sup>3</sup> /hour	in % of 1st. hour		
			1st hour	1st.	2nd. 3rd. hour
1	B (control)	61.8	100	121	125
2	B (contr.) coal-filtrate	59.2	100	115	119
3	extr. III	60.0	100	178	167
4	extr. III coal-filtrate	61.5	100	105	113

The treatment with coal inactivates extract III to a much greater extent than the control (*B*).

c. *Adsorption of the agent by the SEITZ filter.*

*Experiment:* Cylinders of "Z. Eigenheimer" tubers, 40 mm long, inoculated with *Gibberella Saubinetii*, incubated from 6—15/10/38, for 2 days in 5 cm<sup>3</sup> of sterile aq. dest., liquid then partly sterilized, partly filtered through the SEITZ EK-filter. Control: sterile cylinders, treated in the same way.

Central well: 0.6 cm<sup>3</sup> of 25 % KOH. Respiration vessel: 60 discs of 0.5 mm from a "Z. Eigenheimer" tuber, washed. Shaking rate: 220 times per minute.

Side bulb: 0.6 cm<sup>3</sup> of the extracts.

TABLE 15. (Expt. 19—10—38)

No.	Side bulb	Oxygen consumption:				
		mm <sup>3</sup> /hour	in % of 1st. hour			
		1st. hour	1st.	2nd.	3rd.	4th. hour
1	B (contr.)	29.6	100	135	130	130
2	extract III	32.3	100	167	150	158
3	B (contr.) Seitz-filtr.	30.6	100	117	129	127
4	extr. III Seitz-filtr.	33.2	100	116	128	136

Also the SEITZ EK-filter plate inactivates the extract almost completely.

d. *Insolubility of the agent in ether and chloroform.*

Several preliminary tests indicated that the agent of extract III is not soluble in ether nor in chloroform.

The experiments with extract III showed the action on the respiration by substances, produced by the fungus in parasitic conditions and in a concentration lower than that occurring in the living substrate. The latter follows from the next consideration. The effect on the respiration of 30 discs of 1 mm or of 60 discs of 0.5 mm of the tuber is exerted by 3/50 or 6/50 of the extract, obtained from 1 inoculated cylinder, 6 mm in diameter and 35 or 40 mm long.

In order to try to identify the agent with some known substance, a number of substances were tested upon their activity on the respiration of potato tissue. The results will be reported in a second paper.

SUMMARY.

1. The increase of the respiration of plants, attacked by an infectious disease, urged me to investigate the effect of extracts 1<sup>o</sup> of *Gibberella Saubinetii* and other fungi and 2<sup>o</sup> of tissues attacked by this parasite on the respiration of host tissue.

2. The effect of these extracts on the respiration of thin discs of potato tubers was studied by means of the manometrical method of WARBURG. This method proved to be very useful.

3. Even in extremely low concentrations the extracts caused a quick and usually constant and stable increase of the respiration rate.

4. The active substances proved to be thermostable, non volatile and insoluble in ether and chloroform. On the other hand, they are adsorbed

by activated coal and by asbestos filter plates. They can be rinsed out off these adsorbents.

5. The agent does not alter the respiratory quotient of the potato tissue.

6. When the respiration is blocked by cyanic acid, the agent fails to exert its influence upon the residual respiration. This gives evidence that the agent affects the HCN sensitive polyphenol-oxidase system of the potato.

*Hilversum*, December 1939.

#### LITERATURE:

- ALLEN, P. J. and D. R. GODDARD, *Amer. Jl. Bot.* **25**, 613 (1938).  
 BABA, T., *Biochem. Zs.* **275**, 253 (1935).  
 BOSWELL, J. G. and G. C. WHITING, *Ann. of Bot. N. Ser.* **2**, 847 (1938).  
 BROWN, W., *Bot. Review*, **2**, 236 (1936).  
 CALDWELL, J. and J. MEIKLEJOHN, *Ann. of Bot. N. Ser.* **1**, 477 (1937).  
 EGLITS, M., *Phytopathol. Zs.* **5**, 343 (1933).  
 FISCHER, E. and E. GÄUMANN, *Biol. d. pflanzenbew. paras. Pilze*. Jena (1929).  
 KUBOWITZ, F., *Biochem. Zs.* **292**, 221 (1937).  
 LUZ, G., *Phytopathol. Zs.* **7**, 585 (1934).  
 ONSLOW, M. WH., *Biochem. Jl.* **13**, 1 (1919).  
 ROEMER, TH., W. H. FUCHS and K. ISENBECK, *Die Züchtung resist. Rassen der Kulturpflanzen*, Berlin (1938).  
 SCHOORL, N., *Organische Analyse*, II, Amsterdam (1937).  
 STEWART, F. C., *Protoplasma*, **11**, 521 (1928).  
 TURNER, J. S., *New Phytol.* **37**, 232 (1938).  
 WARBURG O. and M. YABUSOE, *Biochem. Zs.* **146**, 380 (1924).  
 YARWOOD, C. E., *Jl. Agricult. Res.* **49**, 549 (1934).

**Botany.** — *On the Effect of Substances, produced by Fungi, on the Respiration of the Tissue of Potato Tubers, II.* (Preliminary report.)  
 By J. J. A. HELLINGA. (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE.)

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

In a previous paper (these Proceedings, 43, 1940, p. 249) it has been reported that *Gibberella Saubinetii* and also other *Fusaria* produce substances that affect the respiration of tissue of potato tubers. Three different extracts were tested: a) extract from the mycelia of the fungus (extract I), b) the culture solution (extract II) and c) the extract from infected potato tissue (extract III). It further was investigated whether a similar effect on the respiration of potato tissue could be found for other substances. The results are reported in this paper and discussed in connection with those obtained with the different extracts. For details on the methods and the preparation of the extracts must be referred to the first paper (HELLINGA, 1940).

THE EFFECT OF OTHER SUBSTANCES.

a. *Yeast extract, peptone and vitamin-like substances.*

Yeast extract (yeast water and Marmite) and crude peptone also proved strongly to increase the respiration of potato tissue (see table 1 and fig. 1). This effect likewise disappears after treatment with coal.

*Experiment:* Marmite: 10 % and 1 % solutions of commercial Marmite (Yeast extract).

Yeast water: extract of 1 gr bakery yeast in 10 cm<sup>3</sup> aq. dest., boiled and centrifuged. 1 % means diluted 10 times.

Peptone: 10 and 1 % solutions of crude peptone in warm water, centrifuged.

Central well: 0.4 cm<sup>3</sup> of 25 % KOH. Respiration vessel: 30 discs of 1 mm from a "Z. Eigenheimer" tuber, washed. Shaking rate: 280 times per minute.

Side bulb: 0.3 cm<sup>3</sup> of the above preparations.

This statement urged me to investigate whether the vitamins or vitamin-

TABLE 1. (Expt. 26—1—39).

No.	Side bulb	Oxygen consumed.				
		mm <sup>3</sup> /hour	in % of 1st. hour			
			1st.	2nd.	3rd.	4th. hour
1	dist. water	62.8	100	100	122	124
2	Marmite 10 <sup>0</sup> / <sub>0</sub> sol.	62.0	100	158	180	188
3	Marmite 1 <sup>0</sup> / <sub>0</sub> sol.	60.0	100	121	134	142
4	Yeast water (10 <sup>0</sup> / <sub>0</sub> yeast)	59.3	100	138	145	157
5	Yeast water (1 <sup>0</sup> / <sub>0</sub> yeast)	59.7	100	122	131	137
6	Peptone 10 <sup>0</sup> / <sub>0</sub> sol.	59.2	100	135	169	180
7	Peptone 1 <sup>0</sup> / <sub>0</sub> sol.	57.1	100	111	132	142



like substances, present in yeast and crude peptone and equally adsorbed by coal, were likely to contribute to the effect on the respiration.

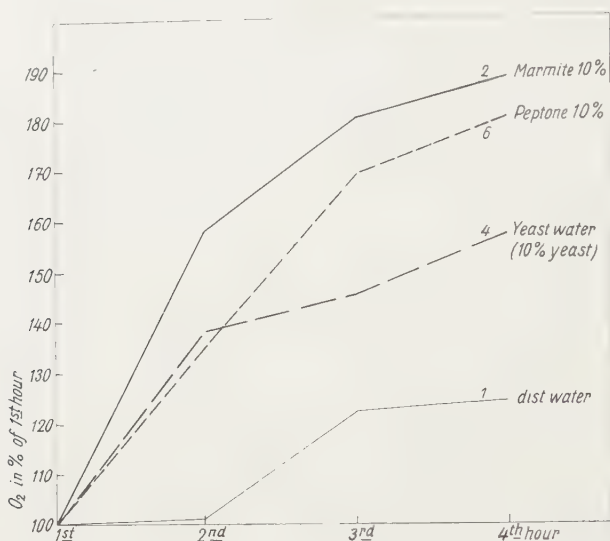


Fig. 1. The effect of yeast extract and of peptone (see table 1).

The possibility that the vitamins B—1, B—2 and C might affect the respiration should not be excluded in anticipation, since LOHMANN (1937) found the pyrophosphoric ester of aneurin (vitamin B—1) to be the prosthetic group of the carboxylase and the same relation is known between lactoflavin (vitamin B—2) and the "yellow ferment" of WARBURG. Also ascorbic acid (vitamin C) seems closely related with oxido-reduction phenomena.

I further could show in experiments with cultures of *Phycomyces Blakesleeanus* and of *Saccharomyces cerevisiae* strain "M" that extract I contains growth factors for both organisms. For *Phycomyces* it probably is aneurin (SCHOPFER, 1934) and for yeast other factors of the bios-complex. Moreover Mr. TH. J. DE MAN, co-worker of Prof. F. KÖGL, has been kind enough to test the bios activity of extract I obtained from 1 gr of mycelium in 10 cm<sup>3</sup> of aq. dest. In the *Saccharomyces* test this activity proved to be about 2500 S.U. per cm<sup>3</sup>.

It was, therefore, fully justified to investigate the effect of a number of such "ergones" (general name, given by H. VON EULER, 1935, to "Wirk-stoffe") on the respiration.

A crude preparation of vitamin B—1 (clay adsorbate), tested in the first place, gave an increase of the respiration of potato tissue indeed. The same effect, however, could not be reproduced when testing pure crystalline aneurin. The effect, therefore, must be ascribed to impurities, present in the crude adsorbate of vitamin B—1.

Table 2 gives a survey of the results obtained with a number of tested substances. They are negative for the major part.

TABLE 2.

Expt. dd.	Substances	Dose per vessel	Results
16—11—38	Pulv. Vitamin B1 (clay-adsorbate) 100 units/gram	12 units 1.2 units 0.12 units 0.012 units	constant increase of abt. 40 % of abt. 20 % of abt. 11 % of abt. 8 %
23—11—38	glutathion	0.0003—3.0 mgr.	no effect
24—11—38	inositol	0.03—3.0 mgr.	no effect
24—11—38	nicotinic acid	0.03—0.3 mgr. 3.0 mgr.	no effect inhibition
6—12—38	cryst. Vitamin B1	0.07—7.0 gamma	no effect
7—12—38	cryst. Vitamin B1 + inositol	0.7 gamma 2.0 mgr.	no effect
9—12—38	cryst. Vitamin B1 + glutathion + nicotinic acid + inositol	0.7 gamma 0.2 mgr. 0.4 gamma 2.0 mgr.	
21—12—38	cryst. Vitamin B1 + pyruvic acid	4.8 gamma 0.6 mgr.	
19— 1—39	biotin (crude), contain.	3.0 gamma biot.	feeble effect
20— 1—39	biotin (crude), contain. lactoflavin	0.6 gamma biot. 3.0 gamma	no effect no effect
25 - 1—39	biotin (crude) + } cont.	0.4 gamma biot.	no effect
	lactoflavin }	1.0 gamma	
	biotin (crude) + } cont.	3.0 gamma biot.	no effect
	cryst. Vit. B1 + }	6.0 gamma	
	inositol }	2.0 mgr.	no effect
	lactoflavin + }	3.0 gamma	
15— 2—39	cryst. Vit. B1 + }	6.0 gamma	no effect
	inositol }	2.0 mgr.	
	do. + asparagin	10.0 mgr.	no effect
	biotin (crude), contain.	10.0 gamma biot.	small effect (ca. 10 %)
	biotin (crude) + } cont.	5.0 gamma biot.	small effect do.
	inositol }	0.5 mgr.	
16— 2—39	biotin (crude) + } cont.	5.0 gamma biot.	small effect do.
	lactoflavin + }	5.0 gamma	
	cryst. Vit. B1 + }	8.0 gamma	small effect (ca. 8 %)
	inositol }	0.4 mgr.	
16— 2—39	biotin (crude), contain.	10.0 gamma biot.	small effect (ca. 8 %)
	biotin (crude) + } cont. inositol }	10.0 gamma biot. 2.0 mgr.	small effect (9—15 %)

TABLE 2. (Continued.)

Expt. dd.	Substances	Dose per vessel	Results
23— 2—39	biotin-pure	2.0 gamma	no effect
	biotin-pure + inositol	2.0 gamma 1.0 mgr.	feeble effect (ca. 4 %)
3— 3—39	biotin-pure	4.0 gamma	small effect (ca. 8 %)
	biotin-pure + inositol	4.0 gamma 0.8 mgr.	small effect (ca. 10 %)
	biotin-pure + inositol +	4.0 gamma	
	cryst. Vit. B1	0.8 mgr.	feeble effect (ca. 5 %)
	cryst. Vit. B1	30.0 gamma	small effect (ca. 8 %)
	inositol	0.8 mgr.	feeble effect (ca. 5 %)
9— 8—39	ascorbic acid (Vit. C)	3.0 mgr.	intensive "respiration"
			increase in first 4 hours
			148, 127, 37, 8% over contr.
		0.3 mgr.	39, 4, 6, 1 % over contr.
		30.0 gamma	5, 0, 2, 1 % over contr.
		3.0 gamma	no effect.

The remarkable "respiration" with ascorbic acid probably is caused by an uptake of oxygen, without transmission of this gas upon another system. This also follows from the R. Q. The normal R. Q. of potato tissue being 1.02—1.07 (see HELLINGA, 1940, p. 255), it was decreased to 0.63 by the addition of 3 mgr of ascorbic acid. Further pulp of potato tissue shows a weak, quickly decreasing respiration. After the addition of ascorbic acid to the pulp, however, suddenly a strong uptake of oxygen took place, apparently caused by still active links in the chain of the redox system. Also here the uptake of oxygen quickly decreased. This phenomenon is not observed when adding extract I to the pulp of potato tissue: there is no sudden decrease in pressure in the WARBURG manometer. The effect of extract I on the respiration of the discs, therefore, cannot be ascribed to an uptake of oxygen for once. Also the fact that the increase of the respiration remains stable during the experiment, as stated in most cases, indicates that the action of extract I has nothing to do with an eventual presence of ascorbic acid.

It seems justified to conclude from the negative results, obtained with the other ergones tabulated in table 2, that the activity of the extract cannot be ascribed to the presence of one or more of these substances. In connection with the strong effect of diluted extract I not too much value should be attached to the weak increase of the respiration — as obtained in several experiments — by pure biotin in the applied high concentrations.

Finally, it could be derived from the results of another set of experiments that the bios activity of extract I (and of yeast extract) does *not* match the effect on the respiration. The details being reported later, it may suffice to mention that the differences in bios activity, after treatment of the extracts with lead-acetate and "Norite" coal, do not match at all the differences in the effect on the respiration of potato tissue of the same fractions.

*b. Indole-3-acetic acid.*

From a decrease in dry weight of potato discs in a solution of indole-3-acetic acid REINDERS (1938) derived that this decrease would be due to a higher respiration of the potato tissue under the influence of hetero-auxin. This caused me to investigate whether the action of the extracts could be ascribed to the presence of hetero-auxin. The production of this substance by yeast and other fungi is generally known. The presence of growth substances in extract I was further demonstrated in the *Avena* test, kindly executed by Dr. M. H. VAN RAALTE.

Experiments on the respiration in the presence of indole-3-acetic acid, however, showed that the latter substance does not cause the effect of extract I, since an increase of the respiration occurred in *none* of the applied concentrations, i.e. in a range between 0.006—60  $\gamma$  indole-3-acetic acid per vessel, or a concentration in the suspension liquid between 2 in  $10^9$  and 2 in  $10^5$ . In the highest concentration, (2 in  $10^5$ ) only an inhibition of the respiration was observed.

The auxin-like substances being soluble in ether, the possibility of the identity of their action and that of extract I on the respiration, moreover, is strongly reduced by the statement that the ether extract of mycelium powder has little or no effect on the respiration. On the other hand, the water extract of the residue strongly affects the respiration. It remains possible, however, that indole-3-acetic acid, in accordance with REINDERS, does affect the respiration of potato tissue when this effect only gets apparent after many hours. This effect then would have nothing in common with the very quick effect of the agent of extract I.

On the other hand, the negative results obtained with hetero-auxin show that the quick reaction on extract I cannot be due to an immediate acceleration of the protoplasmic streaming, caused by hetero-auxin, as stated by THIMANN and SWEENEY (1937) in *Avena* coleoptiles for concentrations below 0.5 in  $10^6$ . With higher concentrations these authors found a retarding of the rate of the protoplasmic streaming and this might be the cause of the inhibition of the respiration, mentioned above for higher concentrations of indole-3-acetic acid.

A later statement by SWEENEY and THIMANN (1938) that the acceleration of the protoplasmic streaming soon disappears through lack of carbohydrates and that the effect can be prolonged by the addition of suitable sugars, f.i. of 1 % of fructose, caused me to try whether hetero-auxin could

increase the respiration in the presence of additional sugars. This proved not to be the case.

c. *Histidin.*

Since it still was not to be excluded that extract I acts on the respiration via an effect on the protoplasmic streaming, a number of experiments were taken with 1-histidin (base). FITTING (1936) induced an acceleration of the protoplasmic streaming of *Vallisneria* by means of this substance. The addition of histidin in seven different doses, ranging from 0.003 to 1200  $\gamma$  per vessel (concentration from 1 in  $10^9$  to 4 in  $10^4$ ), did not affect the respiration, not even after 3 hours.

d. *The sugar effect.*

BOSWELL and WHITING (1938) found that glucose and saccharose do not influence the rate of the respiration in the absence of bacteria. An ever so slight infection, however, would cause a strong increase of the oxygen consumption. These authors, working at a temperature of  $31^{\circ}\text{C}$ , endorse their statement with an example that is not very conclusive to this point. They ascribe the effect of sugars on the respiration of vegetable tissues, as stated by TURNER (1938) and CALDWELL and MEIKLEJOHN (1937), to differences in technique and object.

In different stages I could observe the influence of sugars (saccharose, glucose a.o.) on the respiration of potato tissue and always it was an almost immediate (within half an hour after the application), rather constant and stable effect. In case of an interaction of bacteria, however, the effect slowly develops, steeply to increase after some time. In my opinion it is, therefore, inadmissible to ascribe the sugar effect to bacteria.

The sugar effect proved strongly to depend upon the physiological state of the tubers. The respiration, for instance, of discs from a tuber stored for a long time was largely increased by the addition of 0.3  $\text{cm}^3$  of a 25 % glucose solution (experiment, mentioned by HELLINGA, 1940, p. 261). On the next day the same amount of glucose gave only a weak effect on the respiration of discs from a tuber of a fresh lot. In the latter case saccharose had no effect at all and maltose and fructose only a weak one (see table 3).

*Experiment:* The addition of sugar solutions from the side bulb; solutions boiled for some time; control: distilled water.

Central well: 0.4  $\text{cm}^3$  of 25 % KOH. Respiration vessel: 30 discs of 1 mm from a "Z. Eigenheimer" tuber, washed. Shaking rate: 280 times per minute.

Side bulb: 0.3  $\text{cm}^3$  of the mentioned solutions.

Also highly purified glucose (PFANSTIEHL, 0.05 % of ash) gave the sugar effect.

It was tried to find the concentration, where glucose did no longer act as a "limiting factor". A 40 % glucose solution (i.e.  $\pm 5\%$  in the vessel) still had a stronger effect than 20 %. Still higher concentrations (above 6 % in the vessel caused plasmolysis and thereby a decrease of the respiration.



TABLE 3. (Expt. 6—1—39).

No.	Side bulb	Oxygen consumed:				
		mm <sup>3</sup> /hour	in % of 1st. hour			
			1st.	2nd.	3rd.	4th. hour
1	dist. water	60.8	100	101	111	124
2	25% glucose-solution	60.3	100	117	126	144
3	2.5% glucose-solution	57.1	100	105	117	130
4	0.25% glucose-solution	60.9	100	100	111	124
5	25% saccharose-solution	63.2	100	104	110	123
6	25% fructose-solution	61.5	100	107	113	128
7	25% maltose-solution	58.3	100	103	116	128

Finally, it was tried whether the sugar effect can be added to that of extract I. To that purpose the discs of potato tissue were suspended in 1.4 cm<sup>3</sup> of the phosphate buffer solution to which 0.6 cm<sup>3</sup> of a 20 % glucose solution were added, so that the concentration in the respiration vessel amounted to  $\pm 6$  % of glucose. After the first hour extract I (control: distilled water) was added from the side bulb. The blank was a third vessel without glucose (see table 4 and fig. 2).

*Experiment: Extract I* from 1 gr of mycelium of *Gibberella Saubinetii*, cultivated from 17/3—22/5/39, in 20 cm<sup>3</sup> aq. dest., boiled for 15 minutes on water bath, filtered through hard filter.

Central well: 0.4 cm<sup>3</sup> of 25 % KOH. Respiration vessel: 30 discs of 1 mm from a "Muizen" tuber, washed, suspended in 6 % of a glucose solution (blank: no glucose). Shaking rate: 220 times per minute.

Side bulb: 0.3 cm<sup>3</sup> of the extract (control: aq. dest.).

TABLE 4. (Expt. 19—8—39).

No.	Side bulb	Respiration vessel	Oxygen consumed, in mm <sup>3</sup> /hour:					
			1st.	2nd.	3rd.	4th.	5th.	6th. hour
1	dist. water	phosphate buffer	68.7	68.8	71.4	73.6	76.3	77.7
2	dist. water	phosphate + gluc.	88.3	90.7	97.0	102.0	104.4	106.2
3	extr. I	phosphate + gluc.	91.4	113.1	118.2	125.5	127.9	133.1

The action of extr. I in the absence of glucose is shown by the following experiment, taken some days before with exactly the same extract:

4	extr. I	phosphate buffer	76.0	112.2	113.9	119.4	127.9
---	---------	------------------	------	-------	-------	-------	-------

A comparison of the data of table 4 shows that extract I raises the rate of the respiration to a certain level, *independently* of the presence of glucose. The two effects are not cumulative: which means that they both relate to the same respiratory system, probably the polyphenol-oxidase system. Under the conditions, prevailing in these experiments, both factors



— sugar and agent of extract I — proved to be “limiting” the rate of the respiration of potato tissue. The author is well aware of the theoretical

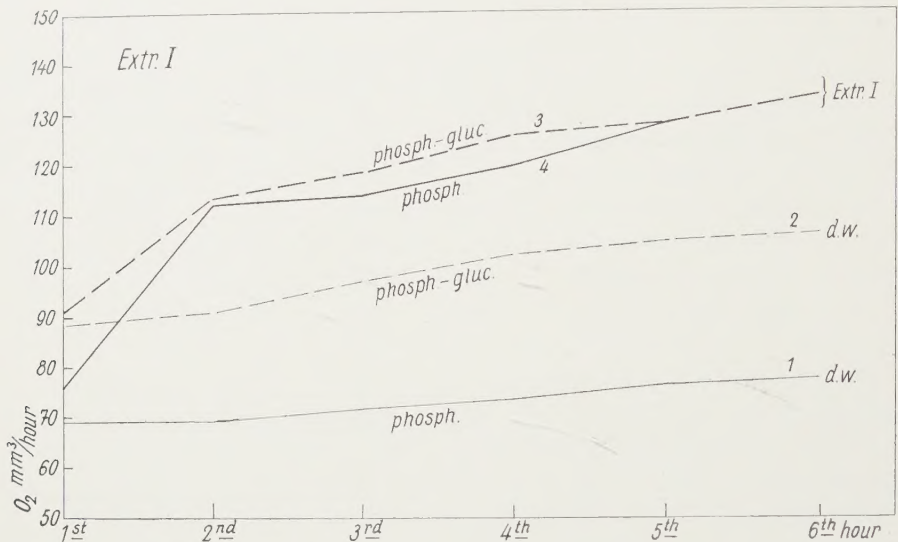


Fig. 2. No cumulative effect of glucose and of extract I (see table 4).

objections against the coexistence of two limiting factors in one system. Further research still is wanted for a conclusive explanation.

#### DISCUSSION.

The general results obtained in the research of substances active on the respiration strongly endorse the expectation that the agents in the three extracts are identical. One might, therefore, speak of one agent, produced by the fungus in pure culture in a synthetic medium as well as on a natural substrate.

It seems very unlikely that these substances intermediate in *realizing* the parasitical relations, since the production of the agent is not specific. It is produced by a number of different fungi. Besides, this possibility is almost eliminated by the fact that yeast (and, as turned out in preliminary tests, also other saprophytes) also produces substances in the mycelium active on the respiration.

On the other hand it is much more probable that the agent does play a part in the *further course* of the parasitical process, when one realizes how strongly the physiological behaviour of the host plant will be affected as soon as the parasite has settled and started to produce the agent.

The investigations did not yet completely elucidate the nature of the agent. A number of known substances has been tested and the negative results partly were reported above. Moreover, several reactions were tried but these too did not yield any reliable indications. The work in this direction was not finished yet when it had to be interrupted in consequence

of the mobilization. For a due identification of the agent, however, the aid of biochemical experts seems indispensable.

The results, thusfar obtained, allow to conclude, however, that the increase of the oxygen consumption is not caused by the oxidation of some added oxidizable substrate. This chiefly is argued by the activity of the extract in high dilutions, the generally constant increase of the respiration and by the unaffected R.Q. It could be calculated, that, in a certain experiment, 10  $\gamma$  of dry matter (after the evaporation of the crude extract I) caused an extra uptake of 11.4 mm<sup>3</sup> of oxygen during 3 hours. When considering that the same volume of oxygen would be required for a complete oxidation of 14  $\gamma$  of glucose and taking into account that the crude extract certainly is not quantitatively active, the conclusion, mentioned above, seems justified.

Moreover, the thermostability of the agent excludes the action of enzymes. Still the possibility remains open that the agent acts as a co-enzyme.

Recently, PRATT and WILLIAMS (1939) showed that the respiration of potato tissue is increased during a short time by "pantothenic acid". It is possible indeed that this activator, also present in mycelia, is closely related to the agent of the extracts. This, however, would not solve the problem so long the exact nature of pantothenic acid is still obscure.

The author believes that a solution of the problem possibly might be expected from a further investigation in the direction of the work by BOSWELL and WHITING (1938). They found a constant increase of the respiration by adding a o-dihydroxyl-phenol compound, isolated from potato tissue. Also this phenol compound is insoluble in ether and maintains the R.Q. of potato tissue on about 1.0. This substance, however, shows a discoloration when for some time in contact with the air, caused by autoxidation of the catechol compounds. This discoloration never has been observed in the extracts I and II.

#### SUMMARY.

1. The substances investigated in a preceding paper (HELLINGA, 1940) are not specifically produced by *Gibberella Saubinetii*; also different *Fusaria*, yeast and crude peptone proved to contain substances active on the respiration of potato tissue.

2. A number of "ergones" as biotin, aneurin, lactoflavin, inositol, ascorbic acid, indole-3-acetic acid, histidin a.o. proved to be almost inactive on the respiration of potato tissue.

3. The effect of sugars on the respiration (sugar effect) is independent of the action of the extracts on the respiration. The sugar effect cannot be ascribed to the interaction of bacteria.

4. The effect of the agent is not due to an oxidation of some added oxidizable substrate.

The author feels much indebted towards: Prof. Dr. V. J. KONINGSBERGER, Director of the Botanical Laboratory of the State University, Utrecht, for leaving the WARBURG equipment at his disposal, as well as for his continuous interest and aid, Miss Prof. Dr. JOHA. WESTERDIJK, Director of the Phytopathological Laboratory "WILLIE COMMELIN SCHOLTEN", Baarn, for the kindly offered hospitality and her benevolence to enable him to combine this work with his duties as her assistant and Prof. Dr. F. KÖGL, Director of the Laboratory of Organic Chemistry of the State University, Utrecht, for kindly supplying him with biotin and other precious substances.

*Hilversum*, December 1939.

#### LITERATURE.

- BOSWELL, J. G. and G. C. WHITING, *Ann. of Bot. N. Ser.* **2**, 847 (1938).  
 CALDWELL, J. and J. MEIKLEJOHN, *Ann. of Bot. N. Ser.* **1**, 477 (1937).  
 EULER, H. VON, *Ark. Kem. Mineral. Geol.* **12 B**, Nr. 11 (1935).  
 FITTING, H., *Jahrb. f. wiss. Bot.* **82**, 913 (1936).  
 HELLINGA, J. J. A., *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam*, **43**, \* (1940).  
 LOHMANN, K., *Naturwiss.* **25**, 26 (1937).  
 PRATT, E. F. and R. J. WILLIAMS, *Jl. gen. Physiol.* **22**, 637 (1939).  
 REINDERS, D. E., *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam*, **41**, 820 (1938).  
 SCHOPFER, W. H., *Arch. f. Mikrobiol.* **5**, 511 (1934).  
 SWEENEY, B. M. and K. V. THIMANN, *Jl. gen. Physiol.* **21**, 439 (1938).  
 THIMANN, K. V. and B. M. SWEENEY, *Jl. gen. Physiol.* **21**, 123 (1937).  
 TURNER, J. S., *New Phytol.* **37**, 232 (1938).